2016 年 8 月 1 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験

１．１ 次元熱伝導問題を差分法により近似解を求めるための定式化を以下の手順で行う．
［　］を埋める語句や数式を記せ．

厚さ d [m]の壁の時刻 t [s]における壁厚方向の温度分布 $T(x, t)$とする．支配方程式，初期条件，境界条件は以下で表されるものとする．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{支配方程式：}\ \rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (0<t,\ 0<x<d) \\ \text{初期条件：}\ T(x,0)=T_0\ [\mathrm{K}] & (0<x<d) \\ \text{境界条件：}\ T(0,t)=T(d,t)=0 & (0\leqq t) \end{array}\right\} \quad (1)$$

ここに，ρ：密度 [kg/m^3]

c：$\boxed{［①名称］}$ [J/K/kg]

κ：熱伝導率 $\boxed{②［単位］}$

である．

壁厚方向をΔx 刻みで M=1/Δx 等分し，時間はΔt 刻みで進めることとする．
$T(m\Delta x, n\Delta t)$の近似値を $T_{m,n}$ と書くことにする．

まず，陽解法に定式化を行う．
偏導関数を以下の差分近似で置き換える．

$$\frac{\partial T}{\partial t}\to\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta t} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\to\frac{[③]}{(\Delta x)^2} \qquad (3)$$

これらを(1)の偏微分方程式に代入すると以下の陽的数値解法公式が得られる．

$$T_{m,n+1}=[④]T_{m+1,n}+[⑤]T_{m,n}+[⑥]T_{m-1,n} \qquad (m=1,\cdots,M\text{-}1) \qquad (4)$$

初期条件 $T_{m,0}=T_0$（m=1,⋯, M-1）から出発して，境界条件 $T_{0,n}=T_{M,n}=0$（n=0,1,2,⋯）を用いながら，n=1,2,⋯に対して式(4)によって順次 $T_{m,n}$ を定めてゆくことができる．

次に，陰解法の定式化を行う．
偏導関数の差分近似として，式(2)はそのまま用い，式(3)の代わりに以下を用いる．

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\to\frac{[⑦]}{(\Delta x)^2} \qquad (5)$$

式(2)(5)を(1)の偏微分方程式に代入すると以下の陰的数値解法公式が得られる．

$$[⑧]T_{m+1,n+1}+[⑨]T_{m,n+1}+[⑩]T_{m-1,n+1}=T_{m,n} \qquad （m=1,\cdots, M-1） \qquad (6)$$

$t=n\Delta t$ までの解が得られているとき，すなわち $T_{m,n}$（m=1,⋯, M-1）が求まっているとき，式(6)を $T_{m,n+1}$（m=1,⋯, M-1）に関する M-1 元連立方程式とみて解くことにより，$t+\Delta t=(n+1)\Delta t$ に対する解が得られる．

２．熱伝導現象に関する以下の問いに答えよ．

（１）流体中におかれた物体の熱伝導の境界条件式として以下が広く用いられている．

$$\bar{q}=\alpha(T_s-T_o)$$

ここに α は熱伝達係数（熱伝達率），T_s は物体の表面温度，T_o は流体の温度である．しかし，この境界条件式では，夏の日に炎天下に駐車した車の車内温度が気温以上に高くなることが説明できない．その理由を説明せよ．

（２）風があると涼しく感じるのはなぜか．

３．熱伝導と物質拡散の類似性（アナロジー）に関する以下の表の［　］を埋めよ．

	熱伝導	物質拡散
主たる変数	温度 T[K]	物質濃度 C[kg/m^3]
流束	［①名称］q[J/m^2/s]	質量流束 J[kg/ m^2/s]
移動則	フーリエの法則 $q=-\kappa\, gradT$	フィックの第 1 法則 ［②数式］
物質定数	熱伝導率κ	［③名称］D[m^2/s]
保存則	［④法則名］	質量保存則
変化の式（一次元）	熱伝導方程式 $c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	拡散方程式（フィックの第 2 法則） ［⑤数式］

４．次の問いに答えよ．

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度が限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査が行われている．

$$C(x,t) = C_0 \left\{ 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \qquad \text{（ただし} erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \text{ である．）}$$

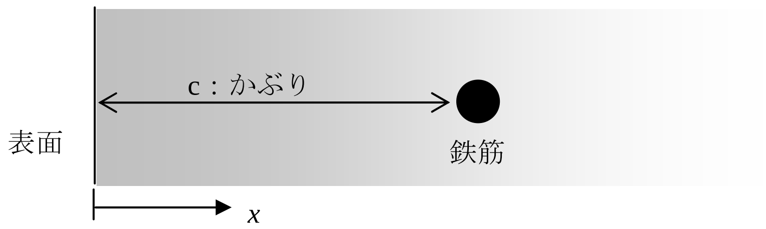
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



コンクリート中への塩分の拡散

以下の問いに答えよ．

(1) t=0 においてコンクリート中に一様に濃度 Ci の塩分が存在していた場合，その後時間 t における内部の塩分濃度の分布 $C(x,t)$を式で表せ．

(2) 以下の方策がコンクリート構造物の塩害に対する長寿命化に有効である理由を，上記の照査式を参照しながら説明せよ．

ア）コンクリートの水セメント比を小さくする

イ）かぶりを大きくする

ウ）表面被覆を行う

エ）ステンレス鉄筋を用いる