2014 年 8 月 4 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験

１．円筒座標系における熱伝導問題を差分法で解くための定式化を以下の手順で行う．を埋める語句や数式を記せ．

図１のような円筒の中心から半径方向への軸対象熱伝導問題を考える．図では仮に高さを h，中心角をθとしている．

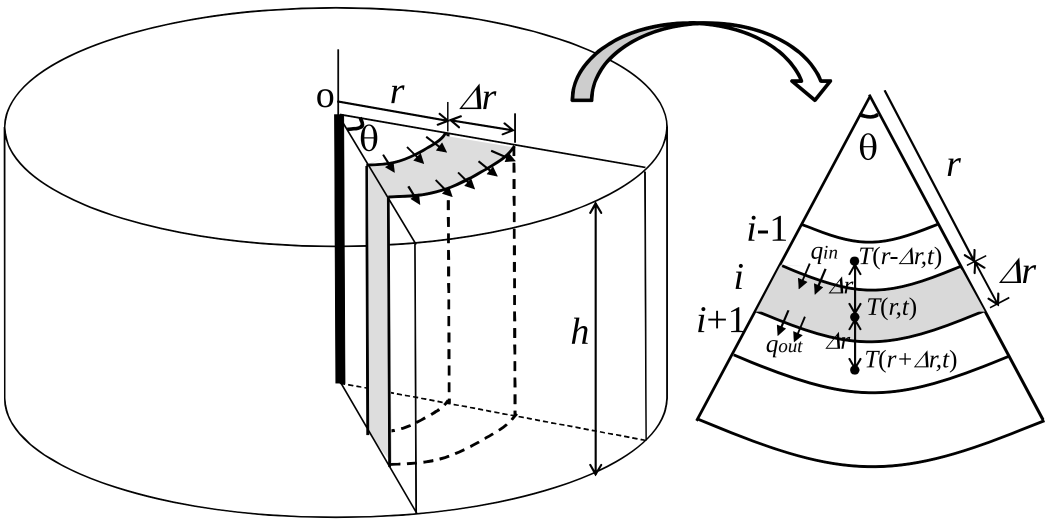


図１　物体内部における熱エネルギーの移動

円筒座標系における軸対象非定常熱伝導方程式は以下で表される．

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1}$$

ここに，c ：比熱 ［①単位］

ρ ：密度 $\left[kg/m^3\right]$

κ ：［②名前］ $\left[J/(m\cdot s\cdot K)\right]$

T ：温度 $\left[K\right]$

である．

半径方向を Δr 刻みで，時間は Δt 刻みで進めることとする．

$T(m\Delta r, n\Delta t)$の近似値を $T_{m,n}$ と書くことにする．

<u>陽解法</u>

偏導関数を以下の差分近似で置き換える．

$$\frac{\partial T}{\partial t} \to \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \to \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta r)^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \to \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta r} \tag{4}$$

式(2)(3)(4)を偏微分方程式(1)に代入すると次の解法公式が得られる.

$T_{m,n+1}$＝［③］$T_{m+1,n}$＋［④］$T_{m,n}$＋［⑤］$T_{m-1,n}$ (5)

ここで, $\alpha = \dfrac{\kappa}{c\rho}$, $\beta = \dfrac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$ とおいた.

ある時刻における温度分布 $T_{m,n}$（m=1,2,⋯M）が既知であるとき, 式(5)を m=1,2,⋯M と順次計算することで次の時間ステップの温度分布 $T_{m,n+1}$（m=1,2,⋯M）を求めることができる.

<u>陰解法</u>

偏導関数を式(2)と以下の差分近似で置き換える.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \to \text{［⑥］} \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \to \text{［⑦］} \tag{7}$$

式(2)(6)(7)を偏微分方程式(1)に代入すると次の解法公式が得られる.

$$-\left(\alpha\beta + \frac{\Delta r}{r}\beta\right)T_{m+1,n+1} + \left(1 + 2\alpha\beta + \frac{\Delta r}{r}\beta\right)T_{m,n+1} - \alpha\beta T_{m-1,n+1} = T_{m,n} \tag{8}$$

ここで, $\alpha = \dfrac{\kappa}{c\rho}$, $\beta = \dfrac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$ とおいた.

ある時刻における温度分布 $T_{m,n}$（m=1,2,⋯M）が既知であるとき, 未知量 $T_{m,n+1}$（m=1,2⋯M）に関する M 元連立一次方程式(8)を解くことにより, 次の時間ステップの温度分布 $T_{m,n+1}$（m=1,2,⋯M）を求めることができる.

２．熱伝導問題の境界条件に関する以下の問いに答えよ．

物体を断熱状態に保つには，どのような方法が考えられるか．以下の熱伝導の境界条件と関連付けて説明せよ．

$$\bar{q} = \alpha(T_s - T_o)$$

ここに α は熱伝達係数（熱伝達率），T_s は物体の表面温度，T_o は周囲の流体の温度である．

３．拡散方程式の積分解に関する以下の問いに答えよ．

無限体中において，初期条件が $C(x, 0)=f(x)$,

$$\left(\text{ここに } f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x), \quad \delta_\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} 1/\varepsilon & (|x| < \varepsilon/2) \\ 0 & (|x| > \varepsilon/2) \end{cases} \right)$$

の拡散方程式 $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ の解は $C(x, t) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ で表される．

（１）時刻 t=0 における C の分布を図に描け．

（２）時間が経過しても C の総和は保存されていることを示せ．

定積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

（３）この拡散方程式と初期条件、境界条件で表される現象にはどのようなものがあるか．題意の式は 1 次元であるが，2 次元 3 次元の例を挙げてもよい．

４．次の問いに答えよ．

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度がある限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査が行われている．

$$C(x,t) = C_0\left\{1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad \text{（ただし}\ erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi\ \text{である．）}$$

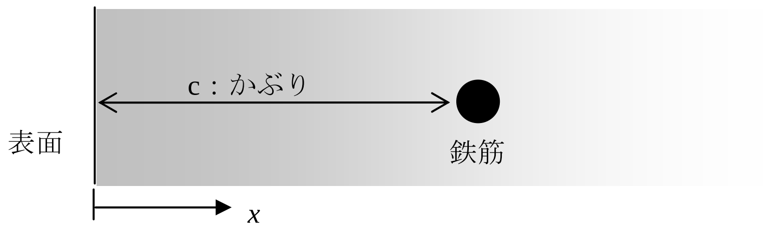
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



コンクリート中への塩分の拡散

以下の文章の正誤を判定せよ．解答用紙に〇×で記せ．（実現象としての正誤ではなく，数式の上での正誤を問うている）

① 表面塩化物イオン濃度 C_0 が 2 倍の環境下では，寿命が 1/2 になる．

② かぶりのばらつきを 10%以下にすると，寿命のばらつきは 21%以下になる．

③ 拡散係数のばらつきを 20%以下にすると，寿命のばらつきは 25%以下になる．

④ 時間が無限に経過したときの鉄筋位置の塩化物イオン濃度は，表面塩化物イオン濃度に初期塩分を加えた値となる．

⑤ 初期塩分が混入されていると，寿命が短くなる．