2011 年 7 月 25 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験

１．物質の拡散移動に関する支配方程式を以下の手順で導く．$\boxed{}$を埋める語句や数式を記せ．

物体内の熱流束（単位時間あたりに単位面積を通過する熱エネルギー）は次のフーリエの法則で表される．

$$q = -\kappa\, gradT \tag{1}$$

ここに，q ：熱流束$\boxed{①［単位］}$

κ ：$\boxed{［②名称］}$ $\left[J/(m \cdot s \cdot K)\right]$

T ：温度$[K]$

である．

簡単のため図１のような一次元問題を考える．

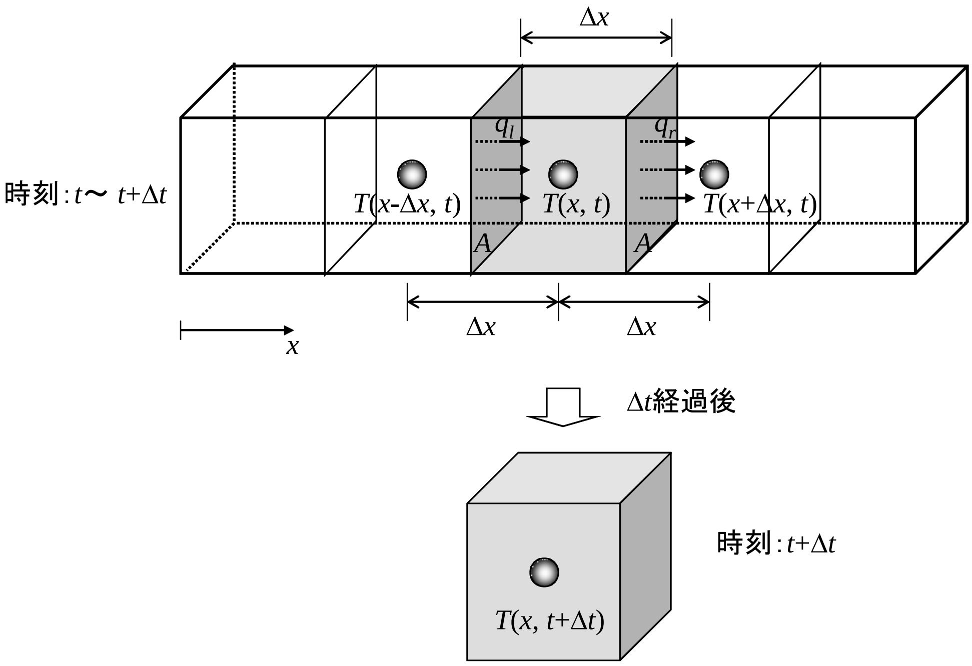


図１　物体内部における熱エネルギーの収支と温度変化

式(1)にしたがい，時刻 t において点 $x-\Delta x$ から点 x に向かう流束 q_l を κ, $T(x,t)$, $T(x-\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{③\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{2}$$

同様に，点 x から点 $x+\Delta x$ に向かう流束 q_r を κ, $T(x,t)$, $T(x+\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{④\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{3}$$

と表される．

この物体は発熱速度 $H[J/m^3/s]$で発熱しているとする．

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\Delta x$）に蓄積される熱エネルギーは，流入，流出，発熱の収支をとって以下のように表される．（q_l, q_r, A, H, Δt, Δx を用いて表せ）

⑤ (4)

一方，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に点 x における温度が $T(x,t)$から $T(x,t+\Delta t)$に上昇したとすると，点 x を中心とする長さ Δx の領域の温度上昇に費やされる熱エネルギーは，以下のように表される．（A, Δx, $T(x,t)$, $T(x,t+\Delta t)$, c（比熱），ρ（密度）を用いて表せ）

⑥ (5)

熱エネルギー保存則より，式(4)と(5)は等しい．（(4)=(5)とした式を記せ）

⑦ (6)

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，（Δx, Δt, κ, c, ρ, $T(x,t)$, $T(x-\Delta x, t)$, $T(x,t+\Delta t)$, $T(x+\Delta x, t)$, H を用いて表せ）

⑧ (7)

$\Delta x \to 0$，$\Delta t \to 0$ とし，T が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると，発熱がある場合の一次元非定常拡散方程式が導かれる．

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + H \qquad (8)$$

発熱がない場合には(8)式は次のようになる．

⑨ (9)

温度分布が定常状態に達した場合には(8)式は次のようになる．

⑩ (10)

２．熱伝導問題の境界条件に関する以下の問いに答えよ．

（１）空気中におかれた物体の熱伝導では，一般に次のような形式の境界条件が用いられる．

$$\bar{q} = \alpha\left(T_s - T_o\right)$$

ここに α は熱伝達係数（熱伝達率），T_s は表面温度，T_o は周囲の気温である．熱伝達係数に影響を及ぼす因子を挙げ，どのように影響を及ぼすか説明せよ．

（２）両面の境界条件が同じである壁の内部の厚さ方向の温度分布は対称となる．対称性を利用して，中心から半分だけを計算対象として温度解析を行う場合，対象面にはどのような温度境界条件を与えればよいか．

３．拡散方程式の積分解に関する以下の問いに答えよ．

（１）無限体中において，初期条件が $u(x, 0)=f(x)$，ただし $f(x)$はディラックのデルタ関数（原点以外で 0，その面積は 1）$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x), \quad \delta_\varepsilon(x)\equiv\begin{cases}1/\varepsilon & (|x|<\varepsilon/2)\\ 0 & (|x|>\varepsilon/2)\end{cases}$

の熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解は $u(x,t)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}}e^{-x^2/4\kappa t}$ で表される．

この解は，平均値 $\boxed{①\quad}$，標準偏差 $\boxed{②\quad}$ の正規分布と同じである．

（ここに，正規分布：$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，平均値：$\mu$，標準偏差：$\sigma$ である．）

（２）なぜ，（１）の解は正規分布関数と同じ形をしているのか説明せよ．定性的な説明でよい．

（３）コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．

$$C(x,t)=C_0\left\{1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}$$ （ただし $erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$ である．）

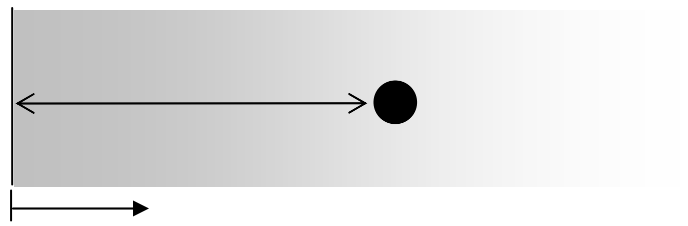
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



鉄筋位置における塩化物イオン濃度がある限界値に達することで構造物の寿命が決まるとする．かぶりを 2 倍にすると寿命は何倍になるか．