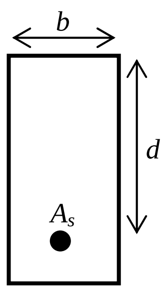
非線形方程式の解法

RC はり断面の M-ϕ 関係を計算する例題：

右図の断面をもつ鉄筋コンクリートはりの，断面の曲げモーメント（M）と曲率（ϕ）の関係を計算せよ．コンクリートと鉄筋の応力－ひずみ関係は，下図で表されるとする．鉄筋の断面積（A_s）は，標準ケースを基本としていくつかのケースを計算せよ．

コンクリートは終始圧縮力のみを受け持つとしてよい．



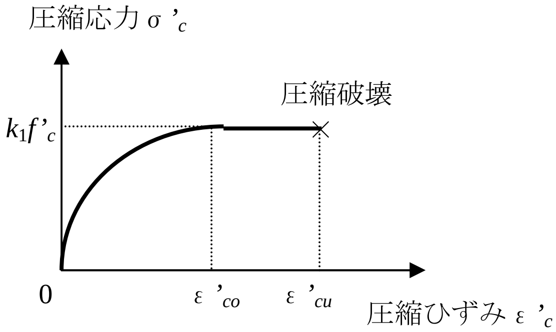
断面

諸元の値：

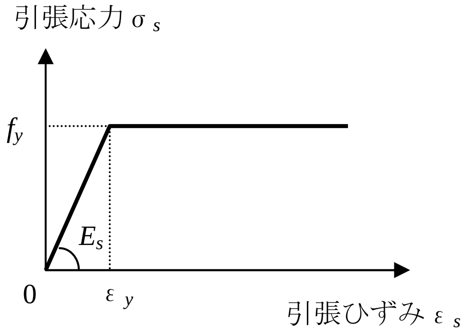
b=150mm, d=250mm, A_s=250mm^2（標準ケース），

f'_c=40N/mm^2,　k_1=0.85,　ε'_{co}=2000×10^{-6},　ε'_{cu}=3500×10^{-6},

f_y=400N/mm^2, E_s=2.0×10^{5}N/mm^2,　ε_y=2000×10^{-6}



コンクリートの圧縮応力－圧縮ひずみ関係



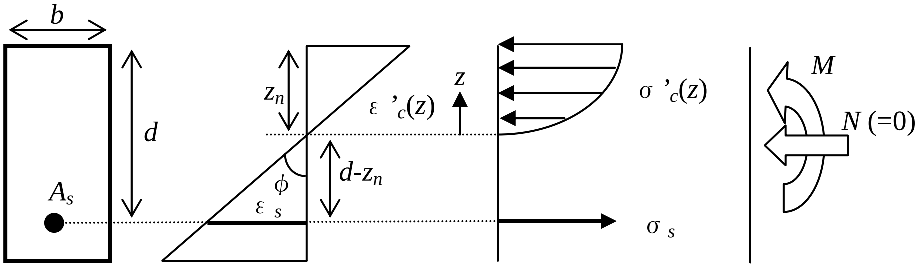
鉄筋の引張応力－引張ひずみ関係

$$\sigma'_c = \begin{cases} k_1 f'_c \dfrac{\varepsilon'_c}{\varepsilon'_{co}}\left(2-\dfrac{\varepsilon'_c}{\varepsilon'_{co}}\right) & \left(0 \le \varepsilon'_c \le \varepsilon'_{co}\right) \\ k_1 f'_c & \left(\varepsilon'_{co} \le \varepsilon'_c < \varepsilon'_{cu}\right) \end{cases}$$

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \left(0 \le \varepsilon_s \le \varepsilon_y\right) \\ f_y & \left(\varepsilon_y \le \varepsilon_s\right) \end{cases}$$

【解答】

支配方程式：



コンクリートのひずみ：　$\varepsilon_c'(z) = \phi z$

コンクリートの応力：　$\sigma_c'(z) = f(\varepsilon_c'(z))$　（f はコンクリートの応力－ひずみ関係）

鉄筋のひずみ：　$\varepsilon_s = \phi(d - z_n)$

鉄筋の応力：　$\sigma_s = g(\varepsilon_s)$　（g は鉄筋の応力－ひずみ関係）

軸方向力：　$0 = \int_0^{z_n} \sigma_c'(z) \cdot b \cdot dz - A_s \sigma_s$　（＊）

モーメント：　$M = \int_0^{z_n} \sigma_c'(z) \cdot b \cdot z \cdot dz + A_s \sigma_s (d - z_n)$　（＊＊）

これらの式より M-ϕ 関係を求めるのが問題であるが，応力－ひずみ関係が線形（$f(\varepsilon)=E\varepsilon$）で，断面形状が矩形であるような単純な場合を除き，一般的には M を ϕ の関数として（陽な形で）書き下すことは不可能である．

（応力－ひずみ関係が線形（$f(\varepsilon)=E\varepsilon$）の矩形断面の場合，$M = E\dfrac{bh^3}{12}\phi$ となる．）

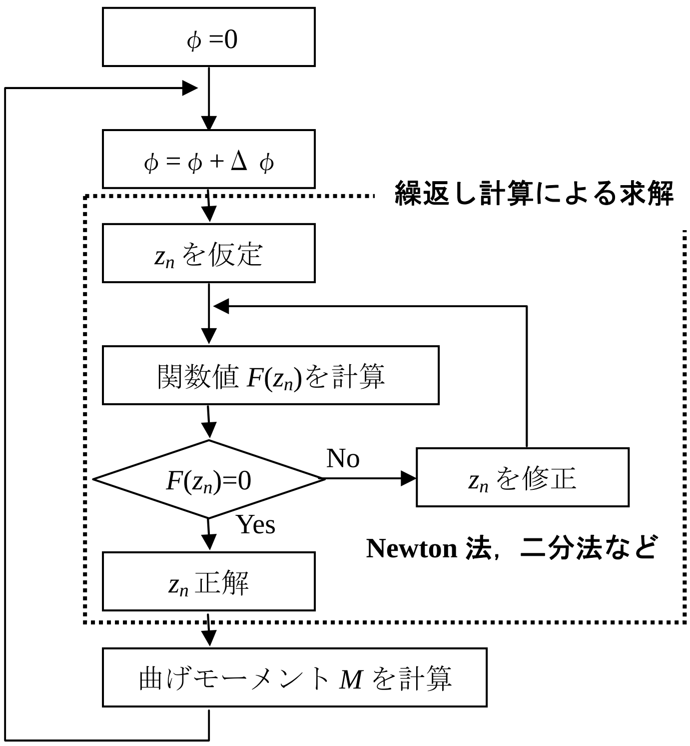
繰返し計算で解を求める方程式を整理しておく

$F(z_n) = 1 - \dfrac{\int_0^{z_n} \sigma_c'(z) \cdot b \cdot dz}{A_s \sigma_s}$ とおけば，「$F(z_n)=0$」⇔「（＊）式」

軸力 N=0 を満足する z_n を求めることは，$0 = F(z_n)$ を満足する z_n を求めることに帰着する．

解法のアルゴリズム：

図のような計算手順で例題の M-ϕ 関係を求めることができる．すなわち，曲率 ϕ を与え，それに対して支配方程式を満たす曲げモーメント M を求める．この作業を，ϕ の適当なステップごとに行えば，M-ϕ 関係を描くことができる．（理論的には M を与えて ϕ を求めることでも M-ϕ 関係が描くことができるが，物体の変形問題では，ひとつの荷重に対して釣り合う変形状態が複数存在する場合があるので，変形を与えて荷重を求める方が一般的である．）



繰返し計算による非線形方程式の解法の例：
以下では，簡単のため z_n を x と書く．

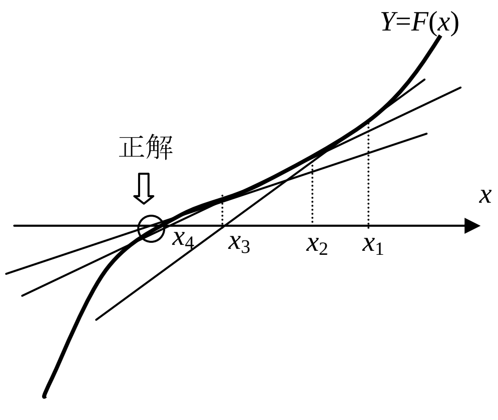
<u>Newton-Raphson 法</u>**（の一種）**：

初期値；x_1，x_2

初期値 x_1，x_2 は，定義域に含まれる任意の 2 点でよいが，正解値との間に極値が存在すると収束しない（正解にたどり着けない）ことがある．初期値に前ステップの正解値を使うなどの工夫が有効である．

漸化式；

$$x_{i+1} = x_i - F(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{F(x_i) - F(x_{i-1})}$$



点（x_i, $F(x_i)$）と点（x_{i-1}, $F(x_{i-1})$）を通る
関数 $Y=F(x)$の割線と x 軸との交点を x_{i+1} とする．

直線の傾きを変えることにより，収束を速く（正解値を得るための繰返し回数を少なく）したり，定義域外への発散を防止したりすることができる場合がある．

ただし，問題によって（関数形によって），これらの事情は異なる．

数値計算プログラムの例：

注）・言語は Visual BASIC（別に推奨するわけではない）

・以下のリストは主要部分のみ示しているので，これだけでは走らない.

Newton-Raphson 法による例

```
Private Sub cmdGo_Click()
    zn = dd / 3#
    For phi = dphi To phimax Step dphi
        n = 0
        Do
            n = n + 1
            Call CalCc
            Call CalTs
            del = 1# - cc / ts
            norm = 0.0001
            If Abs(del) < norm Then Exit Do
            If n = 1 Then
                pzn = zn: pdel = del: zn = zn * 0.99
            Else
                sl = (zn - pzn) / (pdel - del)
                pzn = zn: pdel = del
                zn = pzn + sl * del
            End If
        Loop
        mom = mc + ms
        pmom = mom: pphi = phi
    Next phi
End Sub
```

メインルーチン（フローチャート全体に相当）

```
Sub CalCc()
    cc = 0
    mc = 0
    dz = zn / nn
    For i = 1 To nn
        zi = dz * i - dz / 2#
        epsci = phi * zi
        If epsci < 0 Then
            sigci = 0
        ElseIf epsci < epsco Then
            sigci = k1 * fc * epsci / epsco * (2# - epsci / epsco)
        ElseIf epsci <= epscu Then
            sigci = k1 * fc
        Else
            sigci = 0
        End If
        cc = cc + sigci * dz * bb
        mc = mc + sigci * dz * bb * zi
    Next i
End Sub
```

コンクリートの圧縮力とモーメントを計算するサブルーチン

```
Sub CalTs()
    epss = phi * (dd - zn)
    If epss < 0 Then
        sigs = 0
    ElseIf epss < epsy Then
        sigs = es * epss
    Else
        sigs = fy
    End If
    ts = sigs * aas
    ms = ts * (dd - zn)
End Sub
```

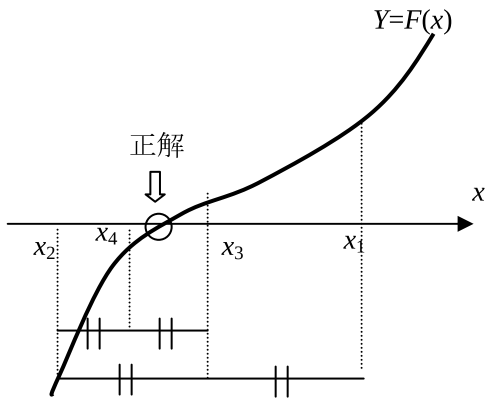
鉄筋の引張力とモーメントを計算するサブルーチン

二分法：

初期値；x_1, x_2

（ただし一方は正解値より大きく, 他方は正解値より小さい値を選ぶ. すなわち,

$F(x_1)\cdot F(x_2) < 0$）



漸化式；

$$F(x_i)\cdot F(x_{i-1}) < 0 \text{ なら } x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

$$F(x_i)\cdot F(x_{i-1}) > 0 \text{ なら } x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i-2}}{2}$$

初期値 x_1, x_2 の間にひとつの正解値が存在するなら，その間に極値が存在しようとも，正解値にたどり着くことができる．また，区間外に発散する心配がない．

<u>二分法によるプログラム例</u>

注）メインルーチンのみ示した.

```
Private Sub cmdGo_Click()
    For phi = dphi To phimax Step dphi
        j = j + 1
        n = 0
        zn = dd * 0.99
        Do
            n = n + 1
            Call CalCc
            Call CalTs
            del = 1# - cc / ts
            If del * pdel > 0 Then
                pzn = ppzn
                pdel = ppdel
            End If
            norm = 0.0001
            If Abs(del) < norm Then Exit Do
            If n = 1 Then
                pzn = zn: zn = dd * 0.01: pdel = del
            Else
                ppzn = pzn: ppdel = pdel
                pzn = zn: pdel = del
                zn = (pzn + ppzn) / 2#
            End If
        Loop
        mom = mc + ms
        pmom = mom: pphi = phi
    Next phi

End Sub
```

この課題では以下についても学ぶこととなる．

収束の判定：

$\left|F\left(x_i\right)\right| \le \delta$ （δは収束判定基準，δ=0.001 など）

数値計算上，完全にゼロにはならないので，ある精度以上でゼロに近いという基準を満足するかどうかで判定する．

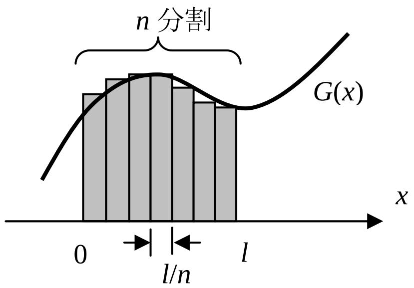
その他，非線形方程式の解法はいくつかある．数値計算の本参照のこと．

数値積分：

断面内の応力分布が任意の形状であっても，断面の軸力と曲げモーメントは，数値積分（区分求積法）によって計算することができる．

被積分関数を $G(x)$，積分区間を 0 から l とすると，

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{G\left(\frac{l}{n}i\right)\cdot\frac{l}{n}\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^l G(x)dx$$

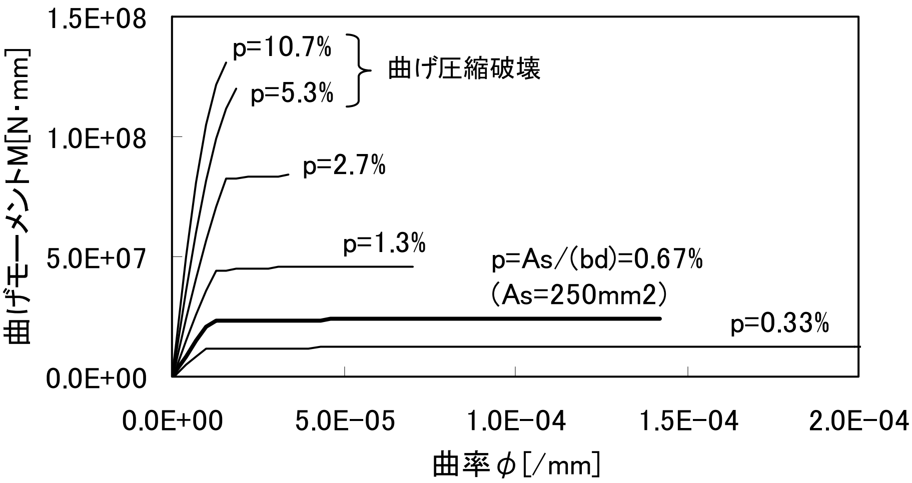


数値積分

図より明らかなように，分割数を増やしてゆけば，厳密解に近づく．

ここでは最も単純な長方形で近似する場合を示したが，台形などで近似する方法もある．

計算結果：



- 計算が正しく行われていれば，いずれの方法によっても上図の結果が得られる．
- プログラムで数値計算を行うメリットは，計算仮定が同じであれば，材料強度，部材寸法，鉄筋比などの条件が変わっても，簡単に答えが求められることである．