

拡散問題の数値解法に関する演習

問題：

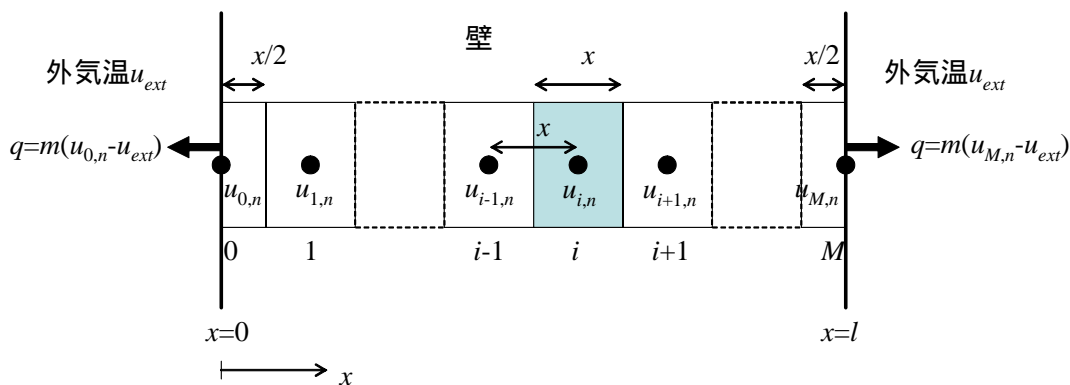
厚さ  $l$  の壁の厚さ方向の温度分布の経時変化を求めたい。壁を構成している材料の密度を  $c$ 、比熱を  $\rho$ 、熱伝導率を  $\kappa$  とする。時刻  $t$  における壁厚方向の温度分布を  $u(x, t)$  と書く。 $(x$  は壁の一方の面からの距離) 初期温度は  $u(x, 0) = u_0$  であるとする。境界条件は、時刻  $t > 0$  において、壁表面から流出する熱流束が  $q = m(u_s - u_{ext})$  ( $m$  は熱伝達係数、 $u_s$  は壁表面の温度、 $u_{ext}$  は外気温度) で表されるとする。

$$\text{支配方程式： } c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < t, 0 < x < l)$$

$$\text{初期条件： } u(x, 0) = u_0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\text{境界条件： } q = m(u_s - u_{ext}) \quad (0 \leq t, x = 0, l)$$

本問題を差分法で解くために、下図のように壁を厚さ方向に  $M$  等分する。 $\Delta x = l/M$  と書く。時間に関する刻みを  $\Delta t$  として  $t = n \cdot \Delta t$  と書く。また  $u(i \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$  を  $u_{i,n}$  と書く。



(1) 陽解法 (前進差分) によって解くための以下の解法公式 (漸化式) を導け。

$i=0$  について

$$u_{0,n+1} = 2 \frac{m}{c\rho} r \cdot \Delta x \cdot u_{ext} + \left( 1 - 2 \frac{m}{c\rho} r \cdot \Delta x - 2 \frac{\kappa}{c\rho} r \right) \cdot u_{0,n} + 2 \frac{\kappa}{c\rho} r \cdot u_{1,n}$$

$i=1 \sim M-1$  について

$$u_{i,n+1} = \frac{\kappa}{c\rho} r \cdot u_{i-1,n} + \left( 1 - 2 \frac{\kappa}{c\rho} r \right) \cdot u_{i,n} + \frac{\kappa}{c\rho} r \cdot u_{i+1,n}$$

$i=M$  について

$$u_{M,n+1} = 2 \frac{\kappa}{c\rho} r \cdot u_{M-1,n} + \left( 1 - 2 \frac{m}{c\rho} r \cdot \Delta x - 2 \frac{\kappa}{c\rho} r \right) \cdot u_{M,n} + 2 \frac{m}{c\rho} r \cdot \Delta x \cdot u_{ext}$$

( $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  と書いた。)

【ヒント】 温度を考える各点 を含む長さ  $\Delta x$  の区間 (コントロールボリューム) のエネ

ルギー保存を考える。  $i=0, M$  については半コントロールボリュームを考える。

(2)  $l=1, u_0=1, u_{ext}=0, c=1, \kappa=1, m=2, M=10, \Delta t=0.004$  として、実際に陽解法で問題を解き、壁厚方向の温度分布を適当な時間ごとに描け。数値計算はどのような方法で行なったのか説明せよ。計算結果はグラフで示すこととし、数値のみの羅列は添付しないこと。

(3) 陰解法(後進差分)によって解くための以下の解法公式(漸化式)を導け。

$i=0$  について

$$\left(1 + 2\frac{m}{c\rho}r \cdot \Delta x + 2\frac{\kappa}{c\rho}r\right)u_{0,n+1} - 2\frac{\kappa}{c\rho}r \cdot u_{1,n+1} = u_{0,n} + 2\frac{m}{c\rho}r \cdot \Delta x \cdot u_{ext}$$

$i=1 \sim M-1$  について

$$-\frac{\kappa}{c\rho}r \cdot u_{i-1,n+1} + \left(1 + 2\frac{\kappa}{c\rho}r\right) \cdot u_{i,n+1} - \frac{\kappa}{c\rho}r \cdot u_{i+1,n+1} = u_{i,n}$$

$i=M$  について

$$-2\frac{\kappa}{c\rho}r \cdot u_{M-1,n+1} + \left(1 + 2\frac{m}{c\rho}r \cdot \Delta x + 2\frac{\kappa}{c\rho}r\right) \cdot u_{M,n+1} = u_{M,n} + 2\frac{m}{c\rho}r \cdot \Delta x \cdot u_{ext}$$

( $r = \Delta x / \Delta t$  と書いた。)

【ヒント】コントロールボリュームの考え方は(1)と同じ。

(4)  $l=1, u_0=1, u_{ext}=0, c=1, \kappa=1, m=2, M=10, \Delta t=0.004$  として、実際に陰解法で問題を解き、壁厚方向の温度分布を適当な時間ごとに描け。数値計算はどのような方法で行なったのか説明せよ。計算結果を(2)と比較せよ。計算結果はグラフで示すこととし、数値のみの羅列は添付しないこと。

(5) 計算条件(初期温度、両端の外気温度、両端の熱伝達係数、時間の刻み、空間の刻みなど)を任意に変化させたケースを自分で設定して、(2)または(4)で作成した数値計算法を用いて解き、考察を述べよ。

【数値計算の方法について】

問(2)(4)(5)では数値計算を行わなければならない。数値計算の経験と習熟度は人によって様々と思うが、それぞれの人々が今回を機会にこれまでの自分よりも向上してもらいたい。以下を目安とされたい。

- A) これまでに自作プログラムを作成した経験があり、上記の説明だけでできる人、あるいは自分で何か参考書を調べながらできる人は、そのまま取り組むのがよい。
- B) これまでプログラム作成の経験がないが、エクセルなら使えるという人は、本課題とともに提供している資料を参考にして、エクセル VBA によるプログラミングにチャレンジしてほしい。
- C) エクセル VBA によるプログラミングも無理な人は、解答例のエクセル VBA をダウンロードし、それを用いて計算してよい。

レポートには A)B)C)のいずれによったのか記すこと。