§拡散問題の厳密解

１．一次元非定常熱伝導方程式：有限体での熱伝導

軸方向にのみ熱伝導が生じる長さ L の棒（あるいは厚さ方向にのみ熱伝導が生じる厚さ L の板）の温度分布 $u(x, t)$は,

支配方程式 $$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\kappa > 0) \tag{1}$$

にしたがう.

棒の両端 x=0 と x=L は温度 0 に固定されているとする.

境界条件 $u(0, t)=0$, $u(L, t)=0$ (2)

初期温度分布は関数 $f(x)$で表されるとする.

初期条件 $u(x, 0)=f(x)$ (3)

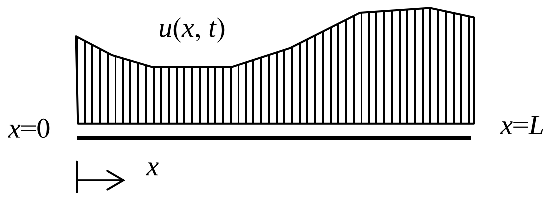

図１　長さ L の棒の温度分布

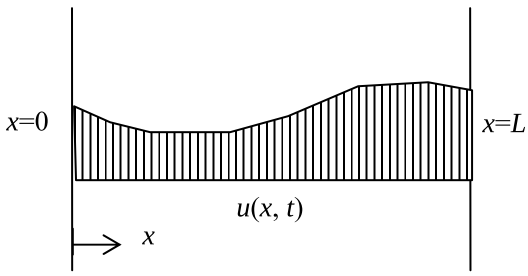

図２　厚さ L の板の温度分布

【解法】

変数分離法を用いる.

$$u(x, t)=X(x)T(t) \tag{4}$$

とおいて，(1)に代入すると,

$$XT' = \kappa X''T$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\kappa}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \tag{5}$$

式(5)の左辺は t だけの関数，右辺は x だけの関数であるので，両者は定数 k でなければならない．よって,

$$X'' - kX = 0 \tag{6}$$

$$T' - \kappa kT = 0 \tag{7}$$

次に境界条件(2)を満たすように，常微分方程式(6)(7)を解く．(2)より，

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,\quad u(L,t)=X(L)T(t)=0 \tag{8}$$

$T(t)\equiv 0$ の場合には興味がないので，(8)より，

$$X(0)=0,\quad X(L)=0 \tag{9}$$

方程式(6)の解で条件(9)を満たすもののうち，意味がある（$u(x,t)\neq 0$）のは，$k=-p^2$（p は正数）に限られる．（なぜならば，k=0 のとき，(6)の一般解は X=ax+b であり，(9)より a=b=0 すなわち，X≡0 となる．また $k=q^2$（q は正数）のとき，(6)の一般解は $X=ae^{qx}+be^{-qx}$ であり，(9)より再び a=b=0 すなわち，X≡0 となる．）したがって，$k=-p^2$ とおいて，

$$X''+p^2X=0 \tag{10}$$

$$T'+\kappa p^2T=0 \tag{11}$$

を考える．(10)の一般解は，A, B を任意定数として，

$$X(x)=A\cos px+B\sin px$$

条件(9)より，$A=0,\quad B\sin pL=0$

$B\neq 0$ となるためには，$\sin pL=0$，すなわち，

$$p_n=\frac{n\pi}{L}\quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{12}$$

でなければならない．したがって，(9)を満たす(10)の解は，B_n を任意定数として，

$$X(x)=X_n(x)=B_n\sin p_nx=B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる．

いま(11)は

$$T'(t)+\lambda_n{}^2T(t)=0,\quad \lambda_n=\sqrt{\kappa}\,p_n=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\kappa}$$

である．この方程式の一般解は，C_n を任意定数として，

$$T_n(t)=C_ne^{-\lambda_n^2t}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

したがって，

$$u(x,t)=u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2t} \tag{13}$$

は，境界条件(2)を満たす熱伝導方程式(1)の解である．なお，式(13)では B_nC_n を新たに C_n とおいた．

次に，u_n の線形結合（重ね合わせ）を考えることにより，初期条件(3)を満たすようにする．

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2t} \tag{14}$$

(3)(14)より，

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x) \tag{15}$$

式(15)の両辺に $\sin\frac{m\pi x}{L}$ をかけて，x=0 から L まで積分すると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_0^L\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx \tag{16}$$

が得られる．ここで，

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} \dfrac{L}{2} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{17}$$

を用いると，定数 C_n は次のようになる．

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{18}$$

したがって，求める解

$$u(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi\right)\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} \tag{19}$$

を得る．

【例１】

初期条件 $u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2K}{L}x & \left(0 < x \leq \dfrac{L}{2}\right) \\ \dfrac{2K}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2} \leq x < L\right) \end{cases}$

境界条件 $u(0, t)=0$，$u(L, t)=0$

を満たす解を求める．

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

となるから，解は，

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\kappa(n\pi/L)^2 t} \\ &= \frac{8K}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\kappa(\pi/L)^2 t} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\kappa(3\pi/L)^2 t} + \cdots\right] \end{aligned}$$

となる．

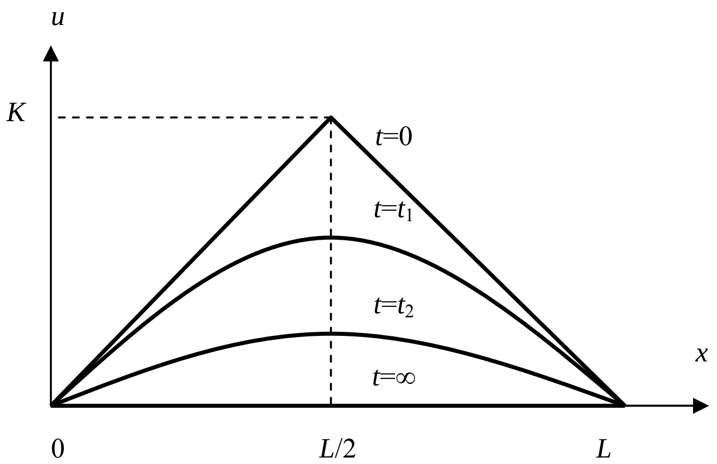

図３　熱伝導方程式の解

【例２】

初期条件　　　　$u(x,0)=u_0$　（一定）

境界条件　　　　$u(0,t)=0$，$u(L,t)=0$

を満たす解を求める．

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi=\begin{cases}\dfrac{2L}{n\pi} & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

であるから，解は，

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\left[u_0\frac{2L}{\pi}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\kappa(\pi/L)^2t}+u_0\frac{2L}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-\kappa(3\pi/L)^2t}+\cdots\right]$$

$$=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-\kappa\left(\frac{2n-1}{L}\pi\right)^2t}\sin\frac{2n-1}{L}x$$

と書ける．

２．一次元非定常熱伝導方程式：無限体での熱伝導

無限に長い棒（あるいは無限に厚い板）における熱伝導問題を考える．

支配方程式　$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad (\kappa>0) \tag{1}$$

初期条件　$u(x, 0)=f(x)$　(2)

【解法】

変数分離法を用いる．$u(x, t)=X(x)T(t)$とおいて，(1)に代入すると，二つの常微分方程式

$$X''+p^2X=0 \tag{3}$$

$$T'+\kappa p^2T=0 \tag{4}$$

を得る．(3)(4)の一般解は，それぞれ，

$$X(x)=A\cos px+B\sin px,\quad T(t)=Ce^{-\kappa p^2t} \tag{5}$$

である．これより，(1)の解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=X(x)T(t)\\&=(A\cos px+B\sin px)e^{-\kappa p^2t}\end{aligned} \tag{6}$$

を得る．（$AC=A$，$BC=B$ とおいた）

(1)は線形同次方程式であるので，(6)の重ね合わせも解である．したがって，A,B を p の関数とし，

$$u(x,t)=\int_0^\infty\{A(p)\cos px+B(p)\sin px\}e^{-\kappa p^2t}dp \tag{7}$$

も(1)の解である．(7)が初期条件(2)を満たすようにする．

$$u(x,0)=\int_0^\infty\{A(p)\cos px+B(p)\sin px\}dp=f(x) \tag{8}$$

$f(x)$のフーリエ積分表示より，

$$\left.\begin{aligned}A(p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos p\xi\,d\xi\\B(p)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin p\xi\,d\xi\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9)を(7)に代入して，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty d\xi\,f(\xi)(\cos p\xi\cos px+\sin p\xi\sin px)e^{-\kappa p^2t}\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty d\xi\,f(\xi)\cos p(\xi-x)e^{-\kappa p^2t}\end{aligned}$$

積分の順序を交換すれば，

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^\infty d\xi\,f(\xi)U(\xi-x,t) \tag{10}$$

$$U(\xi-x,t)\equiv\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dpe^{-\kappa p^2t}\cos p(\xi-x) \tag{11}$$

を得る．公式，

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bxdx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}\qquad (a>0)$$

を用いると，(11)は，

$$U\left(\xi - x, t\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}}e^{-(\xi - x)^2/4\kappa t} \tag{12}$$

と書ける．この結果を使って，(10)は，

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f\left(\xi\right)e^{-(\xi - x)^2/4\kappa t} \tag{13}$$

と書ける．さらに新しい変数$\eta = \left(\xi - x\right)/\sqrt{4\kappa t}$ を用いて，

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, f\left(x + 2\sqrt{\kappa t}\eta\right)e^{-\eta^2}$$

とも書ける．

【例１】

熱伝導方程式$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$の，初期条件 $u(x, 0)=f(x)$の解．ただし，$f(x)$はディラックのデルタ関数（原点以外で 0，その面積は 1）

$$f\left(x\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\delta_\varepsilon\left(x\right), \quad \delta_\varepsilon\left(x\right) \equiv \begin{cases} 1/\varepsilon & \left(\left|x\right| < \varepsilon/2\right) \\ 0 & \left(\left|x\right| > \varepsilon/2\right) \end{cases}$$

(10)(12)より，

$$u\left(x, t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f\left(\xi\right)U\left(\xi - x, t\right) = U\left(-x, t\right)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f\left(\xi\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi\kappa t}}e^{-x^2/4\kappa t}$$

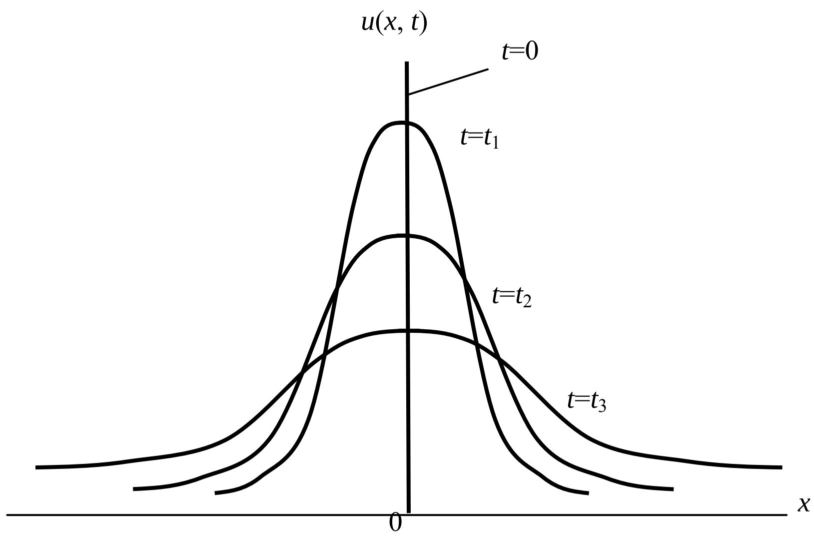

図１　熱伝導方程式の解

時刻 t における温度分布は，平均値 0，標準偏差$\sqrt{2\kappa t}$ の正規分布となる．

（正規分布： $p\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，平均値： μ ，標準偏差： σ）

３．一次元非定常拡散方程式：半無限領域での拡散

コンクリート中への塩化物イオンの侵入

支配方程式　$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{1}$$

初期条件　$C(x, 0)=C_i$　(2)

境界条件　$C(0, t)=C_0$　(t>0)　(3)

$C(\infty, t)= C_i$　(t>0)　(4)

【解法】

$\Pi = \dfrac{C - C_i}{C_0 - C_i}$ とおくと，(1)(2)(3)(4)は以下のように書ける．

支配方程式　$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \tag{5}$$

初期条件　$\Pi(x, 0)=0$　(6)

境界条件　$\Pi(0, t)=1$　(7)

$\Pi(\infty, t)=0$　(8)

いま，$\xi = \dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ とおき（変数結合法），Π が ξ のみの関数と仮定すると

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\left(-\frac{x}{4\sqrt{Dt}}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\left(-\frac{\xi}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d^2\Pi}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{d\Pi}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2\Pi}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{4Dt}$$

$$\therefore\quad -\frac{d\Pi}{d\xi}\frac{\xi}{2t} = D\cdot\frac{d^2\Pi}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{4Dt}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\Pi}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d\Pi}{d\xi} = 0 \tag{9}$$

となり，Π はたしかに ξ のみの関数で表される．

式(6)(7)(8)より

$\Pi=0$　at　$\xi=\infty$　(10)

$\Pi=1$　at　$\xi=0$　(11)

$$p = \frac{d\Pi}{d\xi} \tag{12}$$

とおくと，

$$\frac{dp}{d\xi} + 2\xi p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -2\xi d\xi$$

$$\ln p = -\xi^2 + \ln C_1$$

$$p = C_1 e^{-\xi^2},\quad \Pi = C_1\int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi + C_2$$

$\xi=0$ のとき

$$1 = C_1 \times 0 + C_2$$

$$\therefore \quad C_2 = 1$$

ξ=∞のとき

$$0 = C_1 \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi + 1$$

$$\therefore \quad C_1 = -1 \Big/ \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left(\because \quad \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

$$\Pi(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \tag{13}$$

ここで

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \tag{14}$$

を用いると

$$\Pi(\xi) = 1 - erf(\xi) \tag{15}$$

Π とξをもとの表記に戻すと

$$C(x,t) = (C_0 - C_i) \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2} ds \right\} + C_i$$

または

$$C(x,t) = (C_0 - C_i) \left\{ 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} + C_i$$

初期塩分濃度 C_i=0 なら，

$$C(x,t) = C_0 \left\{ 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\}$$

となる．

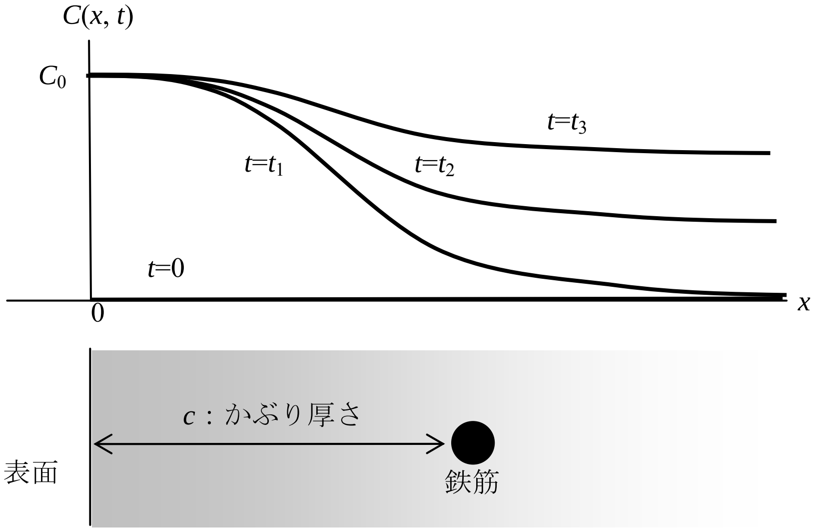

図２　コンクリート中への塩分の拡散