§熱伝導と物質拡散

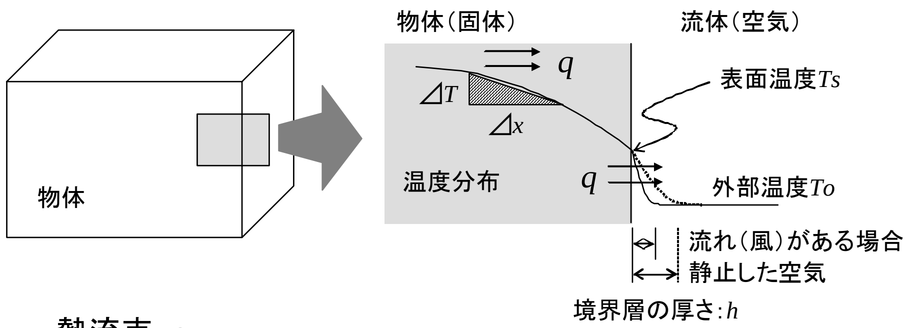
１．はじめに

近年，コンクリート構造，鋼構造などの構造物に関して，破壊・崩壊に対する安全性だけでなく，劣化に対する耐久性が重要視されている．これにともない，物体の変形・破壊に関する性質に加えて，物質移動，熱伝導，化学反応を取り扱う必要が生じている．たとえば，セメントの水和発熱ともなうコンクリート構造物の温度ひび割れを予測するには，発熱と熱伝導を考えなければならない．塩害によるコンクリート中の鉄筋の腐食開始を予測するには，コンクリート中の塩化物イオンの拡散移動を考えなければならない．これらは機械工学，化学工学などの分野では典型的な問題であるが，建設技術者にとっては必ずしもなじみのある問題ではない．

本稿では，物質拡散現象，熱伝導現象を記述する拡散方程式をとりあげ，支配方程式の定式化，解析解の導出と性質，数値解法について述べる．

２．熱伝導方程式

２．１　熱伝導の法則（フーリエの法則）



熱流束：q

物体内部において：　$q = -\kappa \, gradT$　　（一次元　$q = -\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x}$）

κ：熱伝導率（材料定数）

一般境界において：　$q = m(T_s - T_o)\vec{n}$

m：熱伝達係数（流体の種類，流れの状態に依存）

$m \propto h^{-1}$

図１　物体内部と境界における熱伝導

$$q = -\kappa \, gradT \tag{1}$$

ここに，q ：熱流束$\left[J/(m^2 \cdot s)\right]$（単位時間あたりに単位面積を通過する熱エネルギー）

κ ：熱伝導率$\left[J/(m \cdot s \cdot K)\right]$（物質の熱の通しやすさを表す材料定数）

T ：絶対温度$[K]$（位置と時間の関数）

である．式(1)は，熱は温度が高い方から低い方に流れ，その流束の大きさは温度勾配の大きさに比例することを表す経験則である．

熱伝導率は物質固有の定数であり，コンクリートの場合 2.6～2.8$\left[J/(m \cdot s \cdot K)\right]$，岩盤では 1.7～5.2$\left[J/(m \cdot s \cdot K)\right]$である．

なお，熱伝導問題では，慣用的にエネルギーの単位に kcal，時間の単位に hr，温度の単位に℃が用いられることが多い．

２．２　エネルギー保存則（熱伝導方程式）

簡単のため一次元問題を考える．

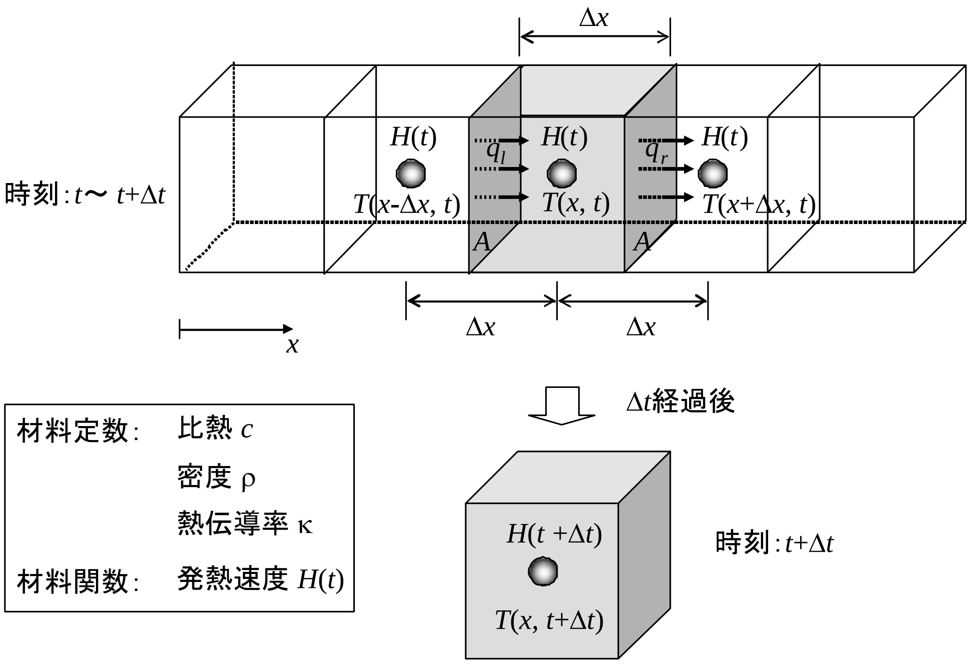


図２　物体内部における熱エネルギーの収支と温度変化

各時間，各場所における，温度を$T(x,t)[K]$，単位時間あたりの熱エネルギーの生成を$H(x,t)\left[J/(m^3 \cdot s)\right]$とする．

時刻 t において，点 x- Δx から点 x に向かって流れる熱流束 q_l は，フーリエの法則にしたがい，

$$q_l = -\kappa \frac{T(x,t) - T(x-\Delta x,t)}{\Delta x} \tag{2}$$

同様に，点 x から点 x+ Δx に向かって流れる熱流束 q_r は，

$$q_r = -\kappa \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x} \tag{3}$$

と表される．

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\Delta x$）に蓄積する熱エネル

ギーは，流入，流出，生成の収支をとって以下のように表される．

$$q_l A\Delta t - q_r A\Delta t + H(x,t) A\Delta x\Delta t \tag{4}$$

時刻 t から $t+\Delta t$ の間に，点 x の温度が $T(x,t)$ から $T(x,t+\Delta t)$ に変化するとすると，点 x を中心とする長さ Δx の区間の温度上昇に費やされる熱エネルギーは，物体の比熱を c 密度を ρ として以下のように表される．

$$c\rho A\Delta x\{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)\} \tag{5}$$

熱エネルギーの保存則より，式(4)の熱エネルギー収支と式(5)の消費エネルギーは等しい．

$$c\rho A\Delta x\{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)\} = q_l A\Delta t - q_r A\Delta t + H(x,t) A\Delta x\Delta t \tag{6}$$

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，

$$c\rho \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\dfrac{T(x+\Delta x,t) - T(x,t)}{\Delta x} - \dfrac{T(x,t) - T(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x} + H(x,t) \tag{7}$$

$\Delta x \to 0$，$\Delta t \to 0$ とし，T が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると，生成項を含む一次元非定常熱伝導方程式が導かれる．

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + H(x,t) \tag{8}$$

式(8)を３次元空間において，より一般的に表示すれば以下のようになる．

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H(x,y,z,t) \tag{9}$$

式(9)は次のようにも書くことができる．

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + H(x,y,z,t) \tag{10}$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa div(gradT) + H(x,y,z,t) \tag{11}$$

２．３　境界条件

流体（空気，水）に接する境界

境界における熱流束は以下のように表される．

$$\vec{q} = \alpha(T_s - T_o) \tag{12}$$

ここに α は熱伝達係数（熱伝達率）$[J/(m^2 \cdot s \cdot K)]$ であり，固体側，流体側の物質の種類のほか，流体の流れの状況に依存する．流れの状況に，境界近傍の温度分布が依存するから

である．静止した空気よりも風がある場合の方が，熱伝達係数が大きくなる．

コンクリートが直接空気，水などの流体に接する場合だけでなく，型枠，養生マット，湛水を介して外気と接する場合にも，それらの影響を含めて熱伝達係数を評価することにより，式(12)の形式の境界条件が用いられる．

断熱境界

熱の出入りがない境界における条件は,

$$\vec{q} = 0 \tag{13}$$

により表される．対称性を利用して解析を行う場合にもこの条件が用いられる．

境界における温度が既定される場合

熱伝導解析におけるその他の境界条件としては，境界における温度が規定される場合がある．これは熱容量の大きな物体に接する場合が該当する．

$$T(0,t) = T_o \tag{14}$$

その他の境界条件

その他，境界において熱流束が与えられる場合（熱源に接する場合），熱放射による熱流束が与えられる場合（日射を受ける場合など）などがある．

３．拡散方程式

物質拡散と熱伝導はアナロジー（類似性）が成立する．

表１　熱伝導と物質拡散のアナロジー

	熱伝導	物質拡散
主たる変数	温度 T[K]	物質濃度 C[kg/m^3]
流束	熱流束 q[J/m^2/s]	質量流束 J[kg/ m^2/s]
移動則	フーリエの法則 $q = -\kappa gradT$	フィックの第 1 法則 $J = -DgradC$
物質定数	熱伝導率 κ [J/m/s/K]	拡散係数 D[m^2/s]
保存則	熱エネルギー保存則	質量保存則
変化の式（一次元）	熱伝導方程式 $c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	拡散方程式（フィックの第 2 法則） $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

支配微分方程式が同じ形となるので，数学的には同じ形の解となる．

４．拡散の実体論

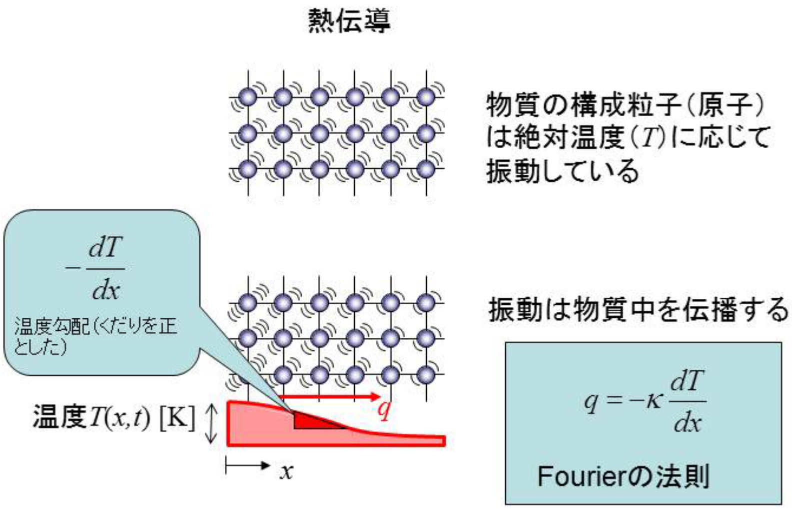


図　熱伝導のメカニズムとフーリエの法則

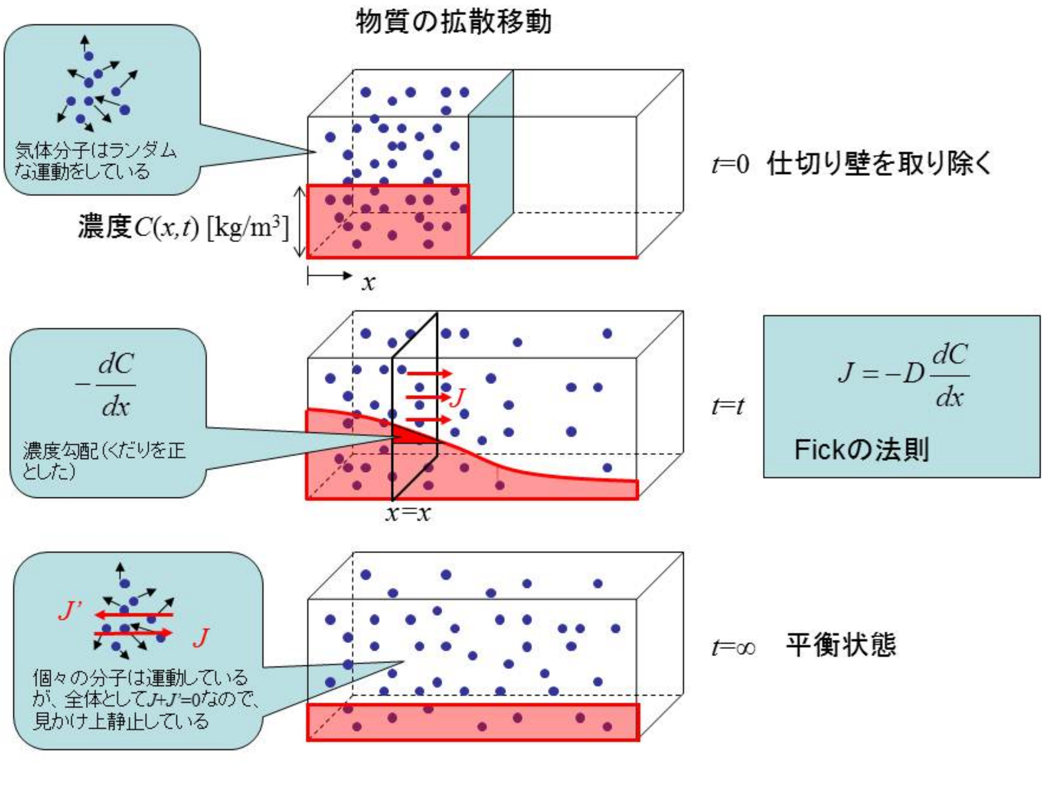


図　物質の拡散移動のメカニズムとフィックの法則