2017 年 5 月 22 日

建設工学のための数学 II（前半）期末試験

１．物質の拡散移動に関する支配方程式を以下の手順で導く．四角の部分①～⑧を埋める語句や数式を記せ．（40 点　5 点×8 問）

物質の拡散移動による質量流束（単位時間あたりに単位面積を通過する質量）は次の *Fick* の法則で表せるとすれば式(1)となる．

$$J = -D\,\mathrm{grad}\,C \qquad \text{式(1)}$$

ここに，J : 質量流束[kg /(m^2・s)]，D : 拡散係数[$\boxed{① \; m^2/s}$]，C : 物質の濃度[kg/m^3] である．

簡単のため図１のような一次元問題を考える．

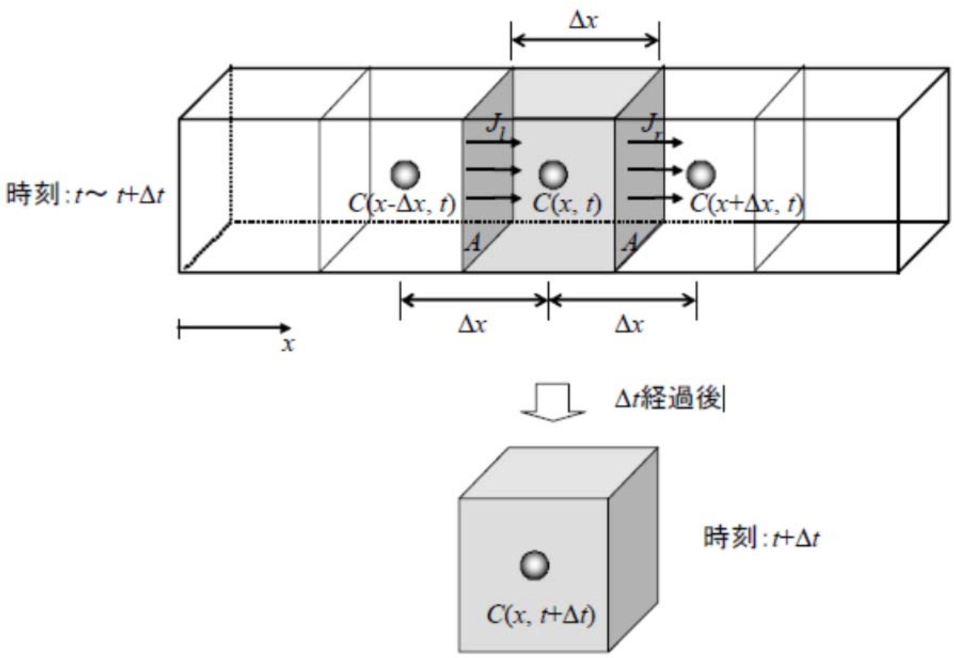

図１　物体内部における物質の収支と濃度変化

Fick の法則にしたがい，時刻 t において点 x-Δx から点 x に向かう流束 J_l を表すと以下の式(2)のようになる．(D, $C(x, t)$, $C(x\text{-}\Delta x, t)$, Δx を用いて表せ)

②	$J_l = -D\dfrac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}$	式(2)

同様に，点 x から点 x+Δx に向かう流束 Jr を表すと式(3)となる．
(D, $C(x, t)$, $C(x+\Delta x, t)$, Δx を用いて表せ)

③	$J_r = -D\dfrac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x}$	式(3)

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\,\Delta x$）に蓄積される質量は，流入，流出の収支をとって式(4)のように表される．(J_l, Jr, A, Δt, Δx を用いて表せ)

④	$J_l A\Delta t - J_r A\Delta t$	式(4)

一方，時刻 t から t+Δt の間に点 x における濃度が $C(x, t)$から $C(x, t+\Delta t)$に変化すると，点 x を中心とする長さ Δx の区間における質量の変化は式(5)のように表される．
(A, Δx, $C(x, t)$, $C(x, t+\Delta t)$を用いて表せ)

⑤	$A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\}$	式(5)

質量保存則より，(4)と(5)は等しい．((4) =(5)とした式を記せ)

⑥	$A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\} = J_l A\Delta t - J_r A\Delta t$	式(6)

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2)，(3)を代入すると式(7)のようになる．
（Δx, Δt, D, $C(x, t)$, $C(x\text{-}\Delta x, t)$, $C(x, t+\Delta t)$, $C(x+\Delta x, t)$,を用いて表せ）

⑦	$\dfrac{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)}{\Delta t} = D\dfrac{\dfrac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x}-\dfrac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x}$	式(7)

(7)式で，$\Delta x \to 0$，$\Delta t \to 0$ とし，C が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると式(8)のような一次元非定常拡散方程式が導かれる．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad \text{式(8)}$$

式(7)において，C が定常状態に達したとき式(9)のようになる．

⑧	$0 = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$	式(9)

2. 1 次元熱伝導問題を差分法により近似解を求めるための定式化を以下の手順で行う．四角①～⑥を埋める語句や数式を記せ．（30 点　5 点×6 問）

厚さ d [m]の壁の時刻 t[s]における壁厚方向の温度分布 $T(x, t)$とする．支配方程式，初期条件，境界条件は以下で表されるものとする．

$$\left.\begin{array}{lll} \text{支配方程式：} & \rho c\dfrac{\partial T}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (0<t,\ 0<x<d) \\ \text{初期条件：} & T(x,0)=T_0\ [\mathrm{K}] & (0<x<d) \\ \text{境界条件：} & T(0,t)=T(d,t)=0 & (0\leqq t) \end{array}\right\}\text{式および条件(1)}$$

ここに，ρ ：密度[kg/m^3]，c：比熱[J/K/kg]，κ ：熱伝導率[$\boxed{①\ J/(m\cdot s\cdot K)}$]である．

壁厚方向を $\varDelta x$ 刻みで M=1/ $\varDelta x$ 等分し，時間は $\varDelta t$ 刻みで進めることとする．
$T(m\varDelta x, n\varDelta t)$の近似値を $T_{m,n}$ と書くことにする．

まず，陽解法の定式化を行う．偏導関数を以下の差分近似で置き換える．

$$\frac{\partial T}{\partial t}\rightarrow\frac{[\boxed{②}]}{\Delta t} \qquad \boxed{②\ T_{m,n+1}-T_{m,n}} \qquad \text{式(2)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\rightarrow\frac{[\boxed{③}]}{(\Delta x)^2} \qquad \boxed{③\ T_{m+1,n}-2T_{m,n}+T_{m-1,n}} \qquad \text{式(3)}$$

これらを式および条件(1)の偏微分方程式に代入すると以下の陽解法の数値解法公式が得られる．

$$T_{m,n+1}=[\boxed{④}]\cdot T_{m+1,n}+[\boxed{⑤}]\cdot T_{m,n}+[\boxed{⑥}]\cdot T_{m-1,n} \qquad (m=1,\ \cdots,\ M\text{-}1) \qquad \text{式(4)}$$

$\boxed{④\ \dfrac{\kappa}{c\rho}\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}}$ 、 $\boxed{⑤\ \left(1-2\dfrac{\kappa}{c\rho}\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)}$ 、 $\boxed{⑥\ \dfrac{\kappa}{c\rho}\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}}$

3. 差分法で用いられる陽的解法と陰的解法で正しいものを選択しなさい．陽解法で最も正しいものを 1 つ選択しなさい．（10 点　10 点×1 問）

① 陽解法は，陰解法より時間間隔⊿t を大きく設定することができるため，長時間の計算を行うときに有効である．

② 陽解法は，差分式の定式化が簡単であるが，陰解法と比較して計算精度が大幅に低下する傾向がある．

③ 陽解法は，陰解法より計算精度が大幅に低下し，計算の安定性も低いため，あまり使用するべきではない．

④ 陽解法は，陰解法より時間間隔⊿t を大きく設定することはできない．ただし，計算の精度が高く，解法公式の定式化が簡単であるといった特徴がある．

⑤ 陽解法は，数値解法公式中に多数の未知数が含まれるため，連立方程式を解く必要がある．解法公式と未知数の数が一致しているため，理論的に算定は可能である．

正解　④

4. 次の問いに答えよ．（20 点　5 点×4 問）

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度が限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査(判定)が行われている．

$$C(x,t)=c_0\left\{1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad \text{式(1)}$$

$$erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$$

ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度，c_0: 表面塩化物イオン濃度，D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数，x: 表面からの距離，t: 時間，である．

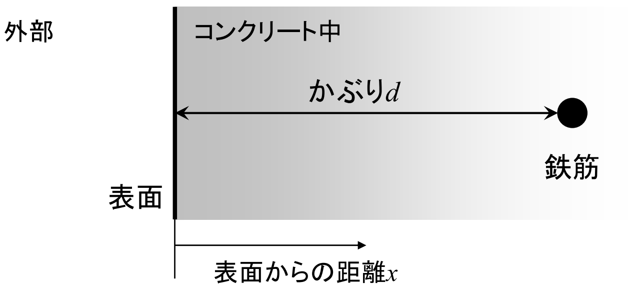

図 2 コンクリート中への塩分の拡散

以下の文章の正誤(〇または×)を判定しなさい．(実現象としての正誤ではなく，数式の上での正誤を答えよ)

(1) 表面塩化物イオン濃度 c_0 が限界塩化物濃度 C_{lim} よりも小さい環境であれば，時間 t が経過しても外からの塩分により鉄筋が腐食する(構造物が寿命に達する)ことはない．
(2) 拡散係数 D が 1/4 のコンクリートを用いると，寿命が 4 倍となる．
(3) かぶり d を 1/2 倍にすると構造物の寿命は 2 倍になる．
(4) 式(1)は，時間が無限に経過した場合に，表面塩化物イオン濃度 c_0 に関係なく，コンクリート中の塩化物イオン濃度が限界塩化物濃度 C_{lim} に達することを表した式である．

正解　(1) 〇　、(2) 〇　、(3) ×　、(4) ×