2015 年 8 月 5 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験（解答）

１．熱伝導に関する支配方程式を以下の手順で導く．□を埋める語句や数式を記せ．50 点

物体内の熱流束（単位時間あたりに単位面積を通過する熱エネルギー）は次のフーリエの法則で表される．

$$q = -\kappa \, gradT \tag{1}$$

ここに，q ：熱流束 ① $\boxed{J/\left(m^2 \cdot s\right)}$ 5 点

κ ：［②熱伝導率］ $\left[J/\left(m \cdot s \cdot K\right)\right]$ 5 点

T ：温度 $[K]$

である．

簡単のため**図１**のような一次元問題を考える．

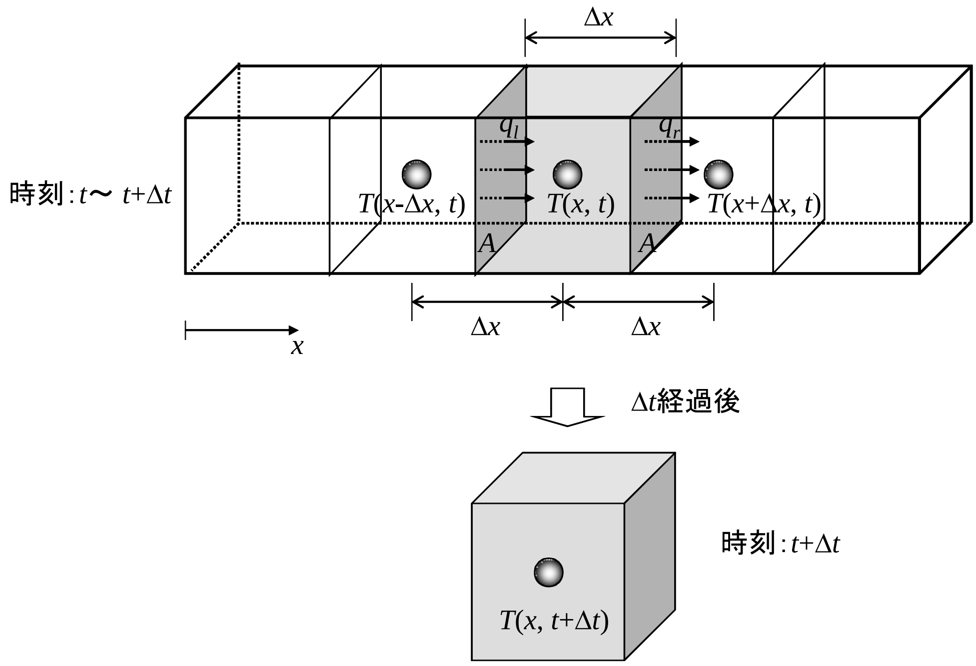


図１　物体内部における熱エネルギーの収支と温度変化

式(1)にしたがい，時刻 t において点 x- Δx から点 x に向かう流束 q_l を κ, $T(x,t)$, $T(x- \Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{③\ q_l = -\kappa \frac{T(x,t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x}} \text{ 5 点} \tag{2}$$

同様に，点 x から点 x+ Δx に向かう流束 q_r を κ, $T(x,t)$, $T(x+ \Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$④\ q_r = -\kappa \frac{T(x+\Delta x,t)-T(x,t)}{\Delta x} \quad 5\text{点} \tag{3}$$

と表される．

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\Delta x$）に蓄積される熱エネルギーは，流入，流出の収支をとって以下のように表される．（q_l, q_r, A, Δt, Δx を用いて表せ）

$$⑤\ q_l A\Delta t - q_r A\Delta t \quad 5\text{点} \tag{4}$$

一方，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に点 x における温度が $T(x,t)$ から $T(x,t+\Delta t)$ に上昇したとすると，点 x を中心とする長さ Δx の領域の温度上昇に費やされる熱エネルギーは，以下のように表される．（A, Δx, $T(x,t)$, $T(x,t+\Delta t)$, c（比熱），ρ（密度）を用いて表せ）

$$⑥\ c\rho A\Delta x\{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)\} \quad 5\text{点} \tag{5}$$

熱エネルギー保存則より，式(4)と(5)は等しい．（(4)=(5)とした式を記せ）

$$⑦\ c\rho A\Delta x\{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)\} = q_l A\Delta t - q_r A\Delta t \quad 5\text{点} \tag{6}$$

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，（Δx, Δt, κ, c, ρ, $T(x,t)$, $T(x-\Delta x,t)$, $T(x,t+\Delta t)$, $T(x+\Delta x,t)$ を用いて表せ）

$$⑧\ c\rho \frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t} = \kappa \frac{\dfrac{T(x+\Delta x,t)-T(x,t)}{\Delta x} - \dfrac{T(x,t)-T(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x} \quad 5\text{点} \tag{7}$$

$\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ とし，T が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると，以下の一次元非定常熱伝導方程式が導かれる．

$$⑨\ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 5\text{点} \tag{8}$$

式(8)を 3 次元（x, y, z）空間で表記すれば次のようになる．

$$⑩\ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad 5\text{点} \tag{9}$$

２．熱伝導現象に関する以下の問いに答えよ．　20 点

（１）熱いお風呂に入っているとき，じっとしていると熱さが和らいでくるが，少し動くとまた熱く感じるのはなぜか．以下で表される流体中におかれた物体の熱伝導の境界条件式を参考にして説明せよ．

$$\bar{q} = \alpha(T_s - T_o)$$

ここに α は熱伝達係数（熱伝達率），T_s は物体の表面温度，T_o は流体の温度である．　10 点

【解答例】体とお湯との間の熱伝導により時間の経過につれ体の周囲のお湯の温度が下がり、体温との差が小さくなり、体に流入する熱流束が小さくなる。これにより熱さが和らいで感じる。お湯の中で動くと、体の周囲がまた温度の高いお湯で囲まれるため、体に流入する熱流束が大きくなる。これにより熱く感じる。

（２）鉄は触ると冷たく感じるが，木は温かく感じるのはなぜか．熱伝導の観点から説明せよ．10 点

【解答例】鉄は木よりも熱伝導率が大きいので、手で触れたときに単位時間あたりに手から奪われる熱エネルギーが大きい。これにより冷たく感じる。

３．熱伝導と物質拡散の類似性と相違点についてそれぞれ 5 行以内で述べよ．　10 点

（１）類似点 5 点

【解答例】移動流束が着目物理量（温度、物質濃度）の空間勾配に比例する。

（２）相違点 5 点

【解答例】熱エネルギーは粒子の振動であるので理想的に伝わるが、物質は経路の閉塞などの影響を受けるため拡散係数が濃度の影響を受けることがある。

４．次の問いに答えよ．20 点

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度が限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査が行われている．

$$C(x,t) = C_0\left\{1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad \text{（ただし } erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi \text{ である．）}$$

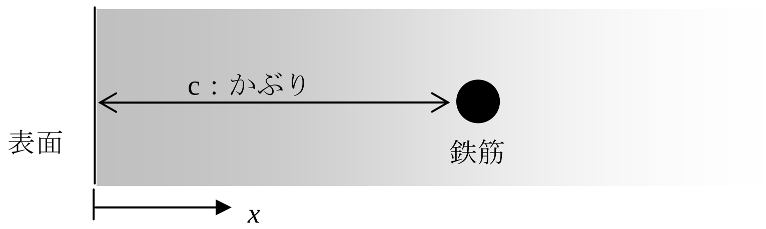
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



コンクリート中への塩分の拡散

以下の文章の正誤を判定せよ．解答用紙に○×で記せ．（実現象としての正誤ではなく，数式の上での正誤を問うている）各 4 点×5＝20 点

① 表面塩化物イオン濃度 C_0 が 2 倍の環境下では，寿命が $1/\sqrt{2}$ になる．　×

② かぶりを 1.5 倍にすると，寿命は 2.25 倍になる．○

③ 拡散係数を 1/2 にすると，寿命は 4 倍になる．×

④ 時間が無限に経過したときの鉄筋位置の塩化物イオン濃度は，表面塩化物イオン濃度に等しくなる．○

⑤ 塩化物イオン濃度の限界値 C_{lim} が 1/2 のコンクリートを開発することはコンクリート構造物の長寿命化に効果がある．×