2013 年 8 月 5 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験（解答）

１．物質の拡散移動に関する支配方程式を以下の手順で導く。$\boxed{}$を埋める語句や数式を記せ。または選択肢の中から選べ。40 点（各 5 点×8）

物質の拡散移動による質量流束（単位時間あたりに単位面積を通過する質量）は次の Fick の法則で表されるとする。

$$J = -DgradC \tag{1}$$

ここに，J ：質量流束$\boxed{①\ [kg/(m^2 \cdot s)]}$

D ：拡散係数$[m^2/s]$

C ：物質の濃度$[kg/m^3]$

である．

簡単のため**図１**のような一次元問題を考える．

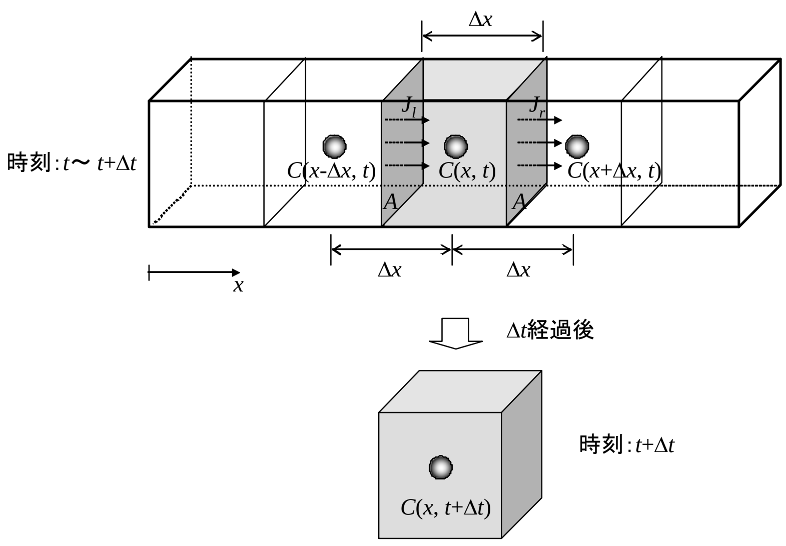


図１　物体内部における物質の収支と濃度変化

Fick の法則にしたがい，時刻 t において点 $x-\Delta x$ から点 x に向かう流束 J_l を D, $C(x,t)$, $C(x-\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{② \ J_l = -D\frac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}} \tag{2}$$

同様に，点 x から点 $x+\Delta x$ に向かう流束 J_r を D, $C(x,t)$, $C(x+\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{③ \ J_r = -D\frac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x}} \tag{3}$$

と表される．

いま，化学反応によって**図１**の物体内部で移動対象物質が発生速度 Q[kg/m^3/s]で発生して

いるとする。

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\Delta x$）に蓄積される質量は，流入，流出，生成の収支をとって以下のように表される．（J_l, J_r, A, Q, Δt, Δx を用いて表せ）

$$\boxed{④\ J_l A\Delta t - J_r A\Delta t + QA\Delta x\Delta t} \qquad (4)$$

一方，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に点 x における濃度が $C(x,t)$ から $C(x,t+\Delta t)$ に変化するとすると，点 x を中心とする長さ Δx の区間における質量の変化は以下のように表される．(A, Δx, $C(x,t)$, $C(x,t+\Delta t)$ を用いて表せ）

$$\boxed{⑤\ A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\}} \qquad (5)$$

質量保存則より，(4)と(5)は等しい．（(4) =(5)とした式を記せ）

$$\boxed{⑥\ A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\} = J_l A\Delta t - J_r A\Delta t + QA\Delta x\Delta t} \qquad (6)$$

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，（Δx, Δt, D, $C(x,t)$, $C(x-\Delta x, t)$, $C(x,t+\Delta t)$, $C(x+\Delta x, t)$, Q を用いて表せ）

$$\boxed{⑦\ \frac{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)}{\Delta t} = D\frac{\dfrac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x} - \dfrac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x} + Q} \qquad (7)$$

$\Delta x \to 0$，$\Delta t \to 0$ とし，C が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると，生成項を有する一次元非定常拡散方程式が導かれる．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + Q \qquad (8)$$

式(8)を div, grad の記号を用いて表すと以下のようになる。

$$\boxed{⑧\ \frac{\partial C}{\partial t} = div(DgradC) + Q} \qquad (9)$$

２．熱伝導問題の境界条件に関する以下の問いに答えよ．15 点

（１）空気中に置かれた固体の表面における熱伝導はどのような形式の境界条件式であらわされるか．5 点

【解答】

$$\vec{q} = \alpha(T_s - T_o)$$

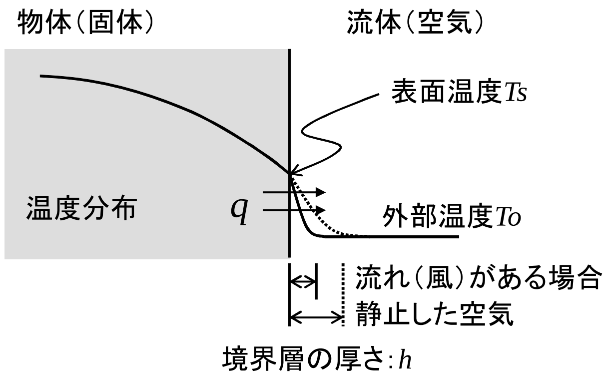
ここに α は熱伝達係数（熱伝達率）$\left[J/(m^2 \cdot s \cdot K)\right]$ であり，固体側，流体側の物質の種類のほか，流体の流れの状況に依存する．

（２）固体の周りの風速が大きいほど，固体の温度が周囲の気温と同じになるのに要する

時間が短いことを，境界条件式と関連づけて説明せよ．10 点

【解答】

風が吹くと一旦形成された物体周囲の境界層（温度の遷移層）が取り払われるので，静止した空気よりも境界層が薄くなり熱伝導が活発に起こるため。



３．拡散方程式の積分解に関する以下の問いに答えよ．　20 点

一次元の無限体中において，初期条件が $C(x,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)$,　$\delta_\varepsilon(x)\equiv\begin{cases}1/\varepsilon & (|x|<\varepsilon/2)\\ 0 & (|x|>\varepsilon/2)\end{cases}$

で与えられる拡散方程式 $\dfrac{\partial C}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ の解は $C(x,t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ で表される．

（１）　時間が経過しても物質量の総和は保存されていることを示せ．

定積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ を用いてよい．10 点

【解答】

t=0 において

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\frac{1}{\varepsilon}dx=1$$

t>0 において

$z=\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$ とおくと，　$dz=\dfrac{dx}{2\sqrt{Dt}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}2\sqrt{Dt}dz=1$$

よって，積分値は常に t=0 と変わらず 1 であるので物質量の総和は保存されている。

（２） 時刻 t における濃度分布を表す解 $C(x,\ t)$は，正規分布関数 $p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ に

類似している．この理由を説明せよ．（厳密な証明でなくてよい．）10 点

【解答例】物質の拡散現象は、粒子のランダムな運動の結果、物質が空間的に均一な濃度の状態に向かって広がってゆく過程である。一方、正規分布はランダムに生起する現象の確率分布を表現するもので、自然界の現象の多くがこれに従うことが知られている。したがって、拡散が進行している過程のある時点での濃度分布は、正規分布関数と同じ形で現れる。（2011 年に既出）

４．次の問いに答えよ．25 点

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度がある限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査が行われている．

$$C(x,t)=C_0\left\{1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad \text{（ただし} erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi \text{ である．）}$$

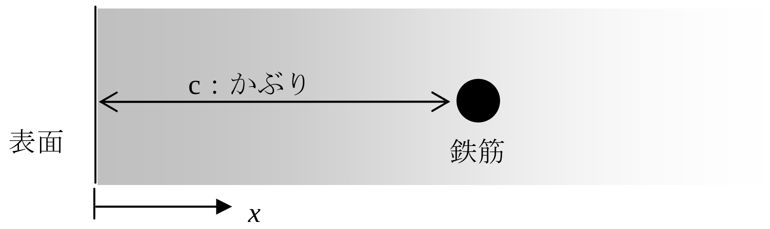
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



コンクリート中への塩分の拡散

以下の文章の正誤を判定せよ．解答用紙に○×で記せ．（実現象としての正誤ではなく，数式の上での正誤を問うている）各 5 点×5=25 点

① 表面塩化物イオン濃度 C_0 が限界塩化物イオン濃度 C_{lim} よりも小さい環境であれば，時間が経過しても外来塩分により鉄筋が腐食することはない．○

② かぶりを 10%大きくすると，寿命は 10%以上伸びる．×

③ 拡散係数が 1/2 のコンクリートを用いると，寿命が 2 倍になる．○

④ 時間が無限に経過したときの鉄筋位置の塩化物イオン濃度は，かぶりの影響を受けな

い． ○

⑤ 初期塩分が混入されていると，鉄筋位置の塩化物イオン濃度が腐食発生限界値に達する時間が早くなる． ○