2012 年 7 月 30 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験解答

１．円筒座標系における熱伝導現象に関する支配方程式を以下の手順で導く．$\boxed{}$を埋める語句や数式を記せ． 50 点

熱伝導の法則より物体内の熱流束（単位時間あたりに単位面積を通過する熱エネルギー）は次の式で表される．

$$q = -\kappa \, gradT \tag{1}$$

ここに，q ：熱流束$\left[J/\left(m^2 \cdot s\right)\right]$

κ ：熱伝導率①$\boxed{\left[J/\left(m \cdot s \cdot K\right)\right]}$ 5 点

T ：温度$\left[K\right]$

である．

いま，**図１**のような円筒の中心から半径方向への軸対象熱伝導問題を考える．図では仮に高さを h，中心角をθとしている．

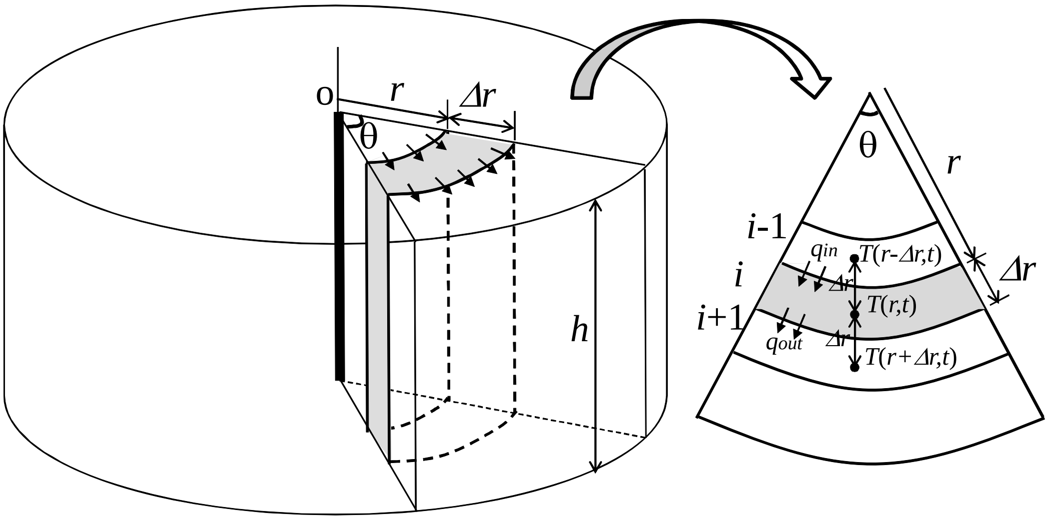


図１　物体内部における熱エネルギーの移動

式(1)にしたがい，時刻 t において，中心から距離 r-Δr の点から，距離 r の点に向かう熱流束 q_{in} をκ, $T(r,t)$, $T(r-\Delta r, t)$, Δr で表すと，

$$\boxed{②\ q_{in} = -\kappa \frac{T(r,t) - T(r - \Delta x, t)}{\Delta r}} \text{ 5 点} \tag{2}$$

同様に，からから，中心から距離 r の点から，距離 r+Δr の点に向かう熱流束 q_{out} をκ, $T(r,t)$, $T(r+\Delta r, t)$, Δr で表すと，

$$\boxed{③\ q_{out} = -\kappa \frac{T(r+\Delta r,t) - T(r, t)}{\Delta r}} \text{ 5 点} \tag{3}$$

となる．

図の着色した領域に着目する．この領域の体積は，$\boxed{④\, r\Delta r\theta h}$ 5 点となる．（$r, \Delta r, h, \theta$で表せ．なお $r >> \Delta r$ なので，$(r+\Delta r)^2 ≒ r^2+2r\Delta r$ としてよい）

微小時間 Δt の間に，着色した領域に内側（円筒の中心に近い側）から流入する熱エネルギーは，

$$\boxed{⑤\, q_{in} r\theta h\Delta t} \text{ 5 点} \tag{4}$$

外側に流出する熱エネルギーは，

$$\boxed{⑥\, q_{out}(r+\Delta r)\theta h\Delta t} \text{ 5 点} \tag{5}$$

となる．（$q_{in}, q_{out}, r, \Delta r, h, \theta, \Delta t$ を用いて表せ）

微小時間 Δt の間に，着色した領域に蓄積される熱エネルギーは，流入，流出の収支をとって以下のように表される．（$q_{in}, q_{out}, r, \Delta r, h, \theta, \Delta t$ を用いて表せ）

$$\boxed{⑦\, \{q_{in} r - q_{out}(r+\Delta r)\}\theta h\Delta t} \text{ 5 点} \tag{6}$$

一方，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に着色した領域の温度が $T(r,t)$から $T(r,t+\Delta t)$に上昇したとすると，この領域の温度上昇に費やされる熱エネルギーは，以下のように表される．（$r, \Delta r, h, \theta, T(r,t), T(r,t+\Delta t)$, c（比熱），$\rho$（密度）を用いて表せ）

$$\boxed{⑧\, (T(r,t)-T(r,t+\Delta t))c\rho r\Delta r\theta h} \text{ 5 点} \tag{7}$$

熱エネルギー保存則より，式(6)と(7)は等しい．（(6)=(7)とした式を記せ）

$$\boxed{⑨\, (T(r,t)-T(r,t+\Delta t))c\rho r\Delta r\theta h = \{q_{in} r - q_{out}(r+\Delta r)\}\theta h\Delta t} \text{ 5 点} \tag{8}$$

式(8)の両辺を$\theta hr\Delta r\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，（$r, \Delta r, \Delta t, \kappa, c, \rho, T(r,t), T(r-\Delta r, t), T(r,t+\Delta t), T(r+\Delta r, t)$を用いて表せ）

⑩

$$\boxed{c\rho\frac{T(r,t)-T(r,t+\Delta t)}{\Delta t} = \kappa\frac{\dfrac{T(r+\Delta r,t)-T(r,t)}{\Delta r}-\dfrac{T(r,t)-T(r-\Delta r,t)}{\Delta r}}{\Delta r}+\frac{\kappa}{r}\frac{T(r+\Delta r,t)-T(r,t)}{\Delta r}}$$

5 点 (9)

$\Delta r \to 0$，$\Delta t \to 0$ とし，T が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると，円筒座標系における軸対象非定常熱伝導方程式が導かれる．

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{10}$$

２．熱伝導問題の境界条件に関する以下の問いに答えよ．　10 点

熱いお風呂に入ったとき，お湯の中でじっとしていると次第に熱さが和らいでくる．しかし，お湯をかき混ぜると再び熱く感じる．これらの現象を，以下の熱伝導の境界条件と

関連付けて説明せよ．

$$\overline{q}=\alpha\left(T_s-T_o\right)$$

ここにαは熱伝達係数（熱伝達率），T_sは物体の表面温度，T_oは周囲の流体の温度である．

【解答例】

- 熱いお湯に入った直後は体の周囲直近まで高い温度のお湯がある→αが大きい→たくさんの熱流束が体に入ってくる→熱く感じる
- じっとしていると体の周囲のお湯の温度が下がる→αが小さくなる→体に入っている熱流束が少なくなる→熱く感じなくなる（じっとしていると熱く感じなくなる理由は，体が慣れるという要因もある．）
- お湯をかき混ぜると体の周囲に形成された温度の低いお湯の層が取り払われる→再び体の周囲直近まで高い温度のお湯がある状態になる→αが大きくなる→たくさんの熱流束が体に入ってくる→熱く感じる

３．拡散方程式の積分解に関する以下の問いに答えよ． 15 点

無限体中において，初期条件が $C(x, 0)=f(x)$，ただし $f(x)$はディラックのデルタ関数（原点以外で 0，その面積は 1） $f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)$, $\delta_\varepsilon(x)\equiv\begin{cases}1/\varepsilon & (|x|<\varepsilon/2)\\ 0 & (|x|>\varepsilon/2)\end{cases}$

の拡散方程式$\dfrac{\partial C}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$の解は$C(x,t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$で表される．

（１）時間 t における濃度分布を積分（$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,t)dx$）したらどのような値になるか．定積分公式$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$を用いてよい．10 点

【解答】 $z=\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}$とおくと，$dz=\dfrac{dx}{2\sqrt{Dt}}$，よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty}C(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}2\sqrt{Dt}dz=1$$

拡散しても質量は保存されるから初期条件の面積 1 は変わらないとの考察から 1 と推察してもよい。

（２）時間が無限に経てば濃度分布はどうなるか．5 点

【解答】0 に近づく

４．次の問いに答えよ． 25 点

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られており，その解が耐久性照査に利用されている．鉄筋位置における塩化物イオン濃度がある限界値 C_{lim} に達することが構造物の寿命であるとして照査が行われている．

$$C(x,t) = C_0\left\{1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad \text{（ただし} erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \text{ である．）}$$

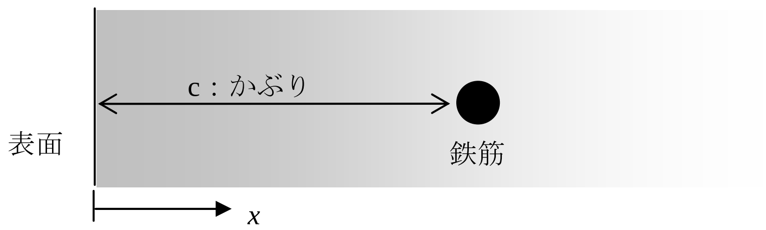
ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

C_0: 表面塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間



コンクリート中への塩分の拡散

以下の文章の正誤を判定せよ．解答用紙に○×で記せ．5 点×5

①寿命の観点からは，表面塩化物イオン濃度が 2 倍になることは，限界塩化物イオン濃度 C_{lim} を 1/2 とすることに相当する．○

②表面塩化物イオン濃度が 1/2 になると，寿命は$\sqrt{2}$倍になる．×

③かぶりを 2 倍にすると，寿命は$\sqrt{2}$倍になる．×

④時間が無限に経過したときの鉄筋位置の塩化物イオン濃度は，計算上，初期塩分の影響を受けない．○

⑤初期塩分が混入されていると，鉄筋位置の塩化物イオン濃度が腐食発生限界値に達する時間が早くなる．○