2010 年 7 月 26 日

建設工学のための数学 II（後半）期末試験（解答）

１．物質の拡散移動に関する支配方程式を以下の手順で導く。$\boxed{\quad}$を埋める語句や数式を記せ。または選択肢の中から選べ。40 点

物質の拡散移動による質量流束（単位時間あたりに単位面積を通過する質量）は次の Fick の法則で表されるとする。

$$J = -D\,gradC \qquad (1)$$

ここに，J ：流束$\left[kg/\left(m^2 \cdot s\right)\right]$

D ：拡散係数$\boxed{[①m^2/s]}$ 5 点

C ：物質の濃度$\left[kg/m^3\right]$

である．

簡単のため**図１**のような一次元問題を考える．

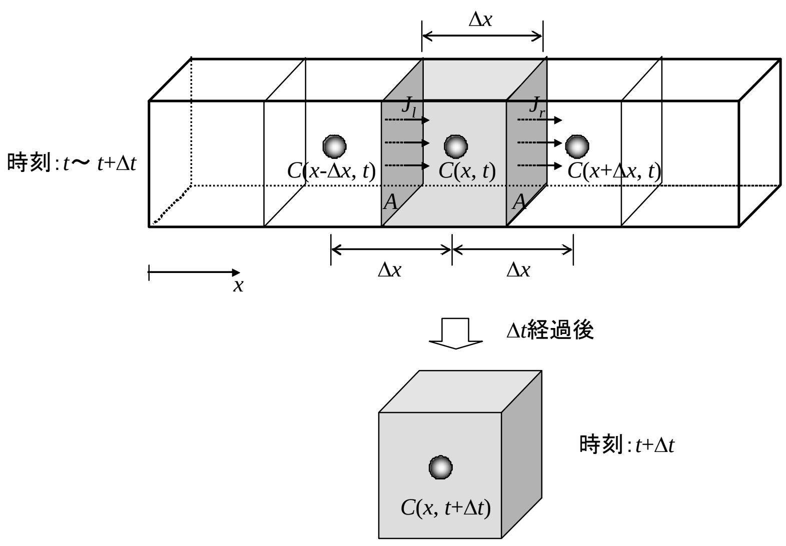

図１　物体内部における物質の収支と濃度変化

Fick の法則にしたがい，時刻 t において点 x-Δx から点 x に向かう流束 J_l を D, $C(x,t)$, $C(x$-$\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{② J_l = -D\frac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}} \text{5 点} \qquad (2)$$

同様に，点 x から点 x+Δx に向かう流束 J_r を D, $C(x,t)$, $C(x$+$\Delta x, t)$, Δx で表すと，

$$\boxed{③ J_r = -D\frac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x}} \text{5 点} \qquad (3)$$

と表される．

微小時間 Δt の間に，点 x を中心とする長さ Δx の区間（体積 $A\Delta x$）に蓄積される質量は，

流入，流出の収支をとって以下のように表される．（J_l, J_r, A, Δt を用いて表せ）

$$\boxed{④\ J_l A\Delta t - J_r A\Delta t}\ 5\text{点} \tag{4}$$

一方，時刻 t から $t+\Delta t$ の間に点 x における濃度が $C(x,t)$から $C(x,t+\Delta t)$に変化するとすると，点 x を中心とする長さ Δx の区間における質量の変化は以下のように表される．(A, Δx, $C(x,t)$, $C(x,t+\Delta t)$を用いて表せ）

$$\boxed{⑤\ A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\}}\ 5\text{点} \tag{5}$$

質量保存則より，④と⑤は等しい．（④＝⑤とした式を記せ）

$$\boxed{⑥\ A\Delta x\{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)\} = J_l A\Delta t - J_r A\Delta t}\ 5\text{点} \tag{6}$$

式(6)の両辺を $A\Delta x\Delta t$ で割って，式(2),(3)を代入すると，（Δx, Δt, D, $C(x,t)$, $C(x-\Delta x, t)$, $C(x,t+\Delta t)$, $C(x+\Delta x, t)$を用いて表せ）

$$\boxed{⑦\ \frac{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)}{\Delta t} = D\frac{\dfrac{C(x+\Delta x,t)-C(x,t)}{\Delta x}-\dfrac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x}}\ 10\text{点} \tag{7}$$

$\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$ とし，C が時間と空間の関数であることを考慮し偏微分記号を用いると一次元非定常拡散方程式が導かれる．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{8}$$

２．次のような場合の熱伝導問題を解くとき，どのような形の境界条件式を用いればよいか．また，そのような境界条件を用いて計算した結果得られる境界近傍（物体内部および外部）の温度分布の経時変化を定性的に描け．30 点

（１）空気中に置かれた固体の表面（式 10 点、図 5 点）

境界における熱流束は以下のように表される．

$$\vec{q} = \alpha(T_s - T_o)$$

ここにαは熱伝達係数（熱伝達率）$\left[J/(m^2\cdot s\cdot K)\right]$であり，固体側，流体側の物質の種類のほか，流体の流れの状況に依存する．

（２）完全断熱材に覆われた固体（式 10 点、図 5 点）

熱の出入りがない境界における条件は,

$\vec{q} = 0$ （または$\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$、$n$ は境界面の法線方向）

により表される．対称性を利用して解析を行う場合にもこの条件が用いられる．

３．拡散方程式の積分解に関する以下の問いに答えよ．

コンクリート中への塩化物イオンの侵入過程は拡散現象としてモデル化できることが知られている．30 点

支配方程式 $$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

境界条件 $C(0, t)=C_0$　（C_0 は表面塩化物イオン濃度）

半無限体中における拡散とすれば，厳密解は以下のように表される．

$$C(x, t) = C_0\left\{1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\} \qquad (*)$$

ここに，$C(x,t)$: コンクリート中の塩化物イオン濃度

D: コンクリート中の塩化物イオン拡散係数

x: 表面からの距離

t: 時間

ただし，$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ である．

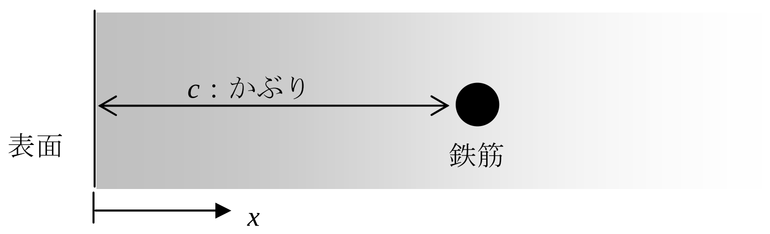

図２　コンクリート中への塩分の拡散

（１）時間が無限に経過すると，鉄筋位置（$x=c$）における塩化物イオン濃度はどうなるか．
10 点

【解答】Co に漸近する。

（２）鉄筋位置における塩化物イオン濃度がある限界値に達することで構造物の寿命が決まるとする．かぶりを 2 倍にすることと，拡散係数を 2 分の 1 にすることはどちらが長寿命化に効果があるか．10 点

【解答】x を 2 倍すると $\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ は 2 倍になるが、D を 1/2 倍しても$\sqrt{2}$=1.4 倍にしかならな

い。よって、かぶりを 2 倍にしたほうが $C(c,t)$の時間変化に及ぼす影響が大きい。

（３）海砂の使用などにより供用開始時からコンクリート中に塩分が含まれていることがある．（＊）を利用して，初期塩化物イオン濃度が C_i のときの $C(x,t)$を表す式を導け．10 点

【解答】$C'(x,t)=C(x,t)+Ci$ とすると、$C(x,t)=C'(x,t)-Ci$。これを（＊）に代入すると、

$$C(x,t)=(C_0-C_i)\left\{1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}+C_i$$