

§ 鉄筋コンクリートはりの曲げの例題

例題：

曲げモーメントを受ける以下の RC はりについて、各問いに答えよ。

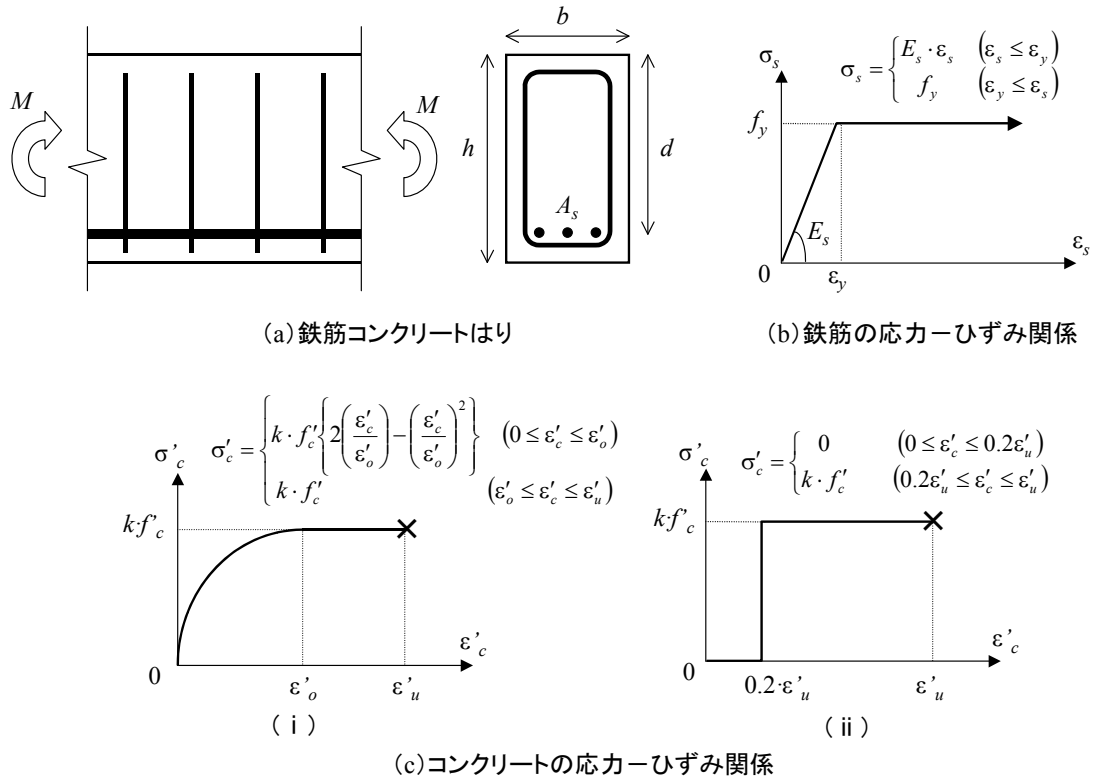


図 1 RC はりの断面および材料の応力-ひずみ関係

表 1 部材の寸法および使用材料の物性値

寸法		コンクリート		鉄筋	
b	150mm	ひび割れ強度 f_b	5.0N/mm ²	弾性係数 E_s	2.1×10 ⁵ N/mm ²
h	300mm	圧縮強度 f'_c	30N/mm ²	降伏ひずみ ε_y	2000×10 ⁻⁶
有効高さ d	250mm	弾性係数 E_c	2.5×10 ⁴ N/mm ²	降伏強度 f_y	= $E_s\varepsilon_y$
鉄筋比 $p=A_s/(bd)$	0.015	k	0.85		
		ε'_o	2000×10 ⁻⁶		
		圧縮破壊ひずみ ε'_u	3500×10 ⁻⁶		

- (1) 曲げひび割れ発生モーメント M_{cr} を計算せよ。
- (2) 鉄筋の応力が 200N/mm² になるときの曲げモーメントを計算せよ。
- (3) 主鉄筋が降伏するときの曲げモーメント M_y を計算せよ。
- (4) 図 1 の (i) のコンクリートの応力-ひずみ関係を用いた場合と (ii) のコンクリ

ートの応力-ひずみ関係を用いた場合のそれぞれについて、はりの終局曲げモーメント M_u を計算せよ。

(5) 以上の計算結果を用いて、この RC はりの断面の荷重ゼロから終局に至るまでの曲げモーメント-曲率関係を描け。

【解答】

(1)

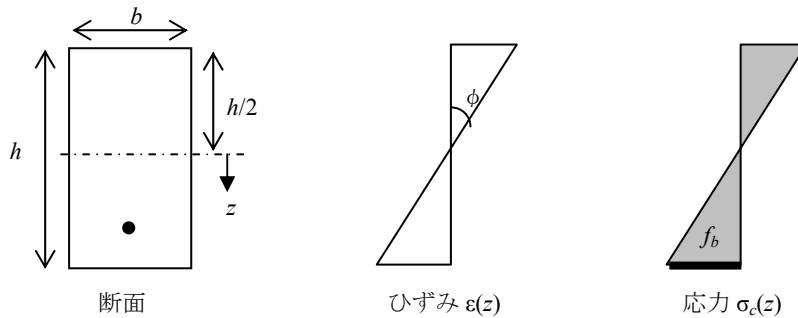


図2 曲げひび割れ発生時における断面のひずみ、応力の状態

図2のように、断面図心軸上に z 軸の原点を選び、曲率を ϕ とする。

支配方程式：

平面保持（棒材の運動場の仮定） $\varepsilon(z) = \phi \cdot z$ (1)

コンクリートは全断面有効の弾性体 $\sigma_c(z) = E_c \cdot \varepsilon(z)$ (2)

鉄筋の負担する応力は無視する。

断面力と内部応力の関係

- 軸力は図のように z 軸をとったので、 $N=0$ は自明

- 曲げモーメント $M = \int_A \sigma_c(z) \cdot z \cdot dA$ (3)

コンクリートのひび割れ条件 $\sigma_c(h/2) = f_b$ (4)

解法：

(1)(2)(3)より $M = \int_{-h/2}^{h/2} E_c \cdot \phi \cdot z \cdot z \cdot b \cdot dz = \frac{1}{12} E_c \phi b h^3$ (5)

(1)(2)(4)より $E_c \cdot \phi_{cr} \cdot \frac{h}{2} = f_b \quad \therefore \phi_{cr} = \frac{2f_b}{E_c h} = \dots = 1.33 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$ (6)

(5)(6)より $M_{cr} = \frac{1}{12} E_c \cdot \frac{2f_b}{E_c \cdot h} \cdot b \cdot h^3 = \frac{f_b \cdot b \cdot h^2}{6} = \dots = 11.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 答：11.3kN・m

別解：

弾性はりであるので、内部応力は $\sigma_c(z) = \frac{M}{I} z \quad \left(I = \frac{bh^3}{12} \right)$ (7)

と表される。

$$(4)(7)より \frac{M_{cr}}{I} \cdot \frac{h}{2} = f_b \quad \therefore M_{cr} = \frac{f_b \cdot b \cdot h^2}{6} = \dots = 11.25 kN \cdot m$$

コメント：

- 計算仮定より，ひび割れ発生までのコンクリートは圧縮・引張有効の弾性体とみなすことができる．つまりはり，弾性はりと同じになるので，別解に示した計算方法を用いることができる．手計算では，この方が圧倒的に簡単に答が求められる．
- 鉄筋は考慮しても，答の数値はあまり変わらない．鉄筋を考慮すると，考慮しない場合よりもひび割れ発生モーメントは大きくなる．

(2)

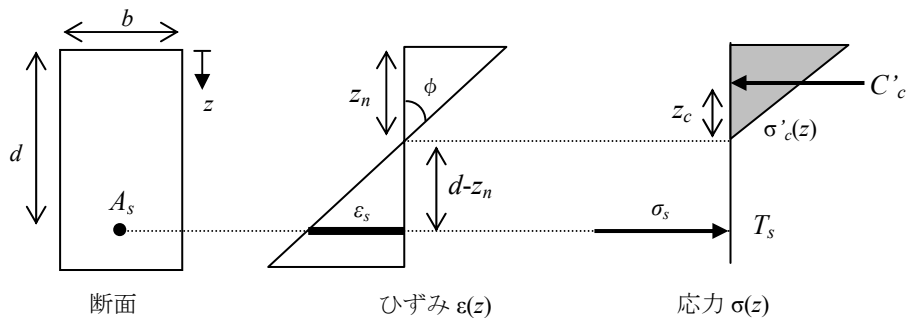


図3 曲げひび割れ発生後～鉄筋降伏前における断面のひずみ，応力の状態

まず，第Ⅱ段階（曲げひび割れ発生後～鉄筋降伏前）における，断面のひずみ，応力の状態の一般解を求める．図3のように，断面上縁に z 軸の原点を選び，曲率を ϕ ，中立軸の位置を z_n とする．

支配方程式：

{	平面保持（棒材の運動場の仮定）	$\varepsilon(z) = \phi \cdot (z - z_n)$	(8)
	コンクリートは圧縮側のみ有効の弾性体	$\sigma'_c(z) = E_c \cdot \varepsilon'(z)$ (ただし $z \leq z_n$)	(9)
	鉄筋とコンクリートの付着	$\varepsilon_s = \varepsilon(d)$	(10)
	鉄筋は弾性体	$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$	(11)
	断面力と内部応力の関係		
• 軸力	$0 = C'_c - T_s$	(12)	
• 曲げモーメント（中立軸まわり）	$M = C'_c \cdot z_c + T_s \cdot (d - z_n)$	(13)	

解法：

鉄筋の引張力 $T_s = A_s \cdot \sigma_s$ (14)

コンクリートの圧縮合力 $C'_c = \int_A \sigma'_c(z) dA = \frac{1}{2} E_c \cdot \phi \cdot z_n^2 \cdot b$ (15)

コンクリートの圧縮合力の作用位置 $z_c = z_n - \frac{\int_A \sigma'_c(z) \cdot z \cdot dA}{\int_A \sigma'_c(z) dA} = \frac{2}{3} z_n$ (16)

(8)(10)(11)(14)(15)を(12)に代入すると，

$$0 = \frac{1}{2} E_c \phi b z_n^2 - A_s E_s \phi (d - z_n) \quad \therefore \quad z_n^2 + 2 \frac{A_s E_s}{b E_c} z_n - 2 \frac{A_s E_s}{b E_c} d = 0$$

この方程式の有意な解を求めると、 $z_n = \frac{A_s E_s}{b E_c} \left(-1 + \sqrt{1 + 2 \frac{b d E_c}{A_s E_s}} \right) = \dots = 98 \text{ mm}$

$\sigma_s = 200 \text{ N/mm}^2$ とすると、

$$(8)(10)(11) \text{ より, } \phi = \frac{\epsilon_s}{d - z_n} = \frac{\sigma_s}{E_s (d - z_n)} = \dots = 6.26 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$(13)(14)(15)(16) \text{ より, } M = \frac{1}{2} E_c \phi z_n^2 b \cdot \frac{2}{3} z_n + A_s \sigma_s (d - z_n) = \dots = 24.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

答 : 24.4 kN·m

コメント :

- モーメントのつりあい(13)は任意の点を中心として考えてよい。計算が簡単になる点を選ぶのがよい。たとえば、圧縮合力の作用位置まわりのモーメントのつりあい、鉄筋位置まわりのモーメントのつりあいを考えてもよい。
- コンクリートの圧縮合力 C'_c の計算(15)、および圧縮合力の作用位置 z_c の計算(16)は、図形的な問題に置き換えて計算すると簡単に計算できる。積分(15)(16)の意味するところを考えると、圧縮合力 C'_c は応力分布 (図3の着色部分) の面積、作用位置 z_c は応力分布の重心に相当する。この問題では、応力分布が三角形であるので、図形的な解釈が計算を簡単にする。複雑な積分計算を行わず、三角形の面積と重心を求める計算で済むからである。原理原則に従って解く姿勢と、答になるべく速くたどり着く解き方を選ぶ姿勢を柔軟に使い分けたい。
- 最終的には数値を求める問題であっても、手計算による場合は、途中は記号のまま計算し、最後に数値を代入するのが原則である。次元や物理的意味を常に意識できるからである。数値を代入してしまうと、次元がわからなくなり、計算ミスのもとにもなる。ただし、計算の複雑さも適宜考える必要がある。この問題では、中立軸の位置 z_n は、途中でいったん数値で求めている。
- この問題を解く過程で出てくる中立軸の位置 z_n に関する二次方程式には、荷重 M や変形状態 ϕ が含まれていないことがわかる。つまり、本問題で用いた仮定で解く限り、第II段階では中立軸の位置 z_n は荷重によらず以下の一定値となる。

$$z_n = \frac{A_s E_s}{b E_c} \left(-1 + \sqrt{1 + 2 \frac{b d E_c}{A_s E_s}} \right)$$

ここで、 $p = \frac{A_s}{b d}$, $n = \frac{E_s}{E_c}$ とおくと、

$$z_n = d n p \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n p}} \right) \quad \text{と表すことができる。}$$

p , n は鉄筋コンクリート部材の力学特性を決定づける無次元パラメータであり、そ

れぞれ「鉄筋比」「ヤング係数比」と呼ばれる。この式を公式として用いてもよいが、自分で導けるようにしておくことが望ましい。

- 第Ⅱ段階における、断面のモーメントと曲率の関係は、

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} E_c \phi z_n^2 b \cdot \frac{2}{3} z_n + A_s E_s \phi (d - z_n) \cdot (d - z_n) \\ &= E_c \left\{ \frac{1}{3} b z_n^3 + p b d n (d - z_n)^2 \right\} \cdot \phi \\ &= E_c I_e \phi \quad \left(I_e \equiv \frac{1}{3} b z_n^3 + p b d n (d - z_n)^2 \right) \end{aligned}$$

となる。\$I_e\$ は、鉄筋コンクリートはりを曲げ剛性が等価な弾性係数 \$E_c\$ (コンクリートの弾性係数) の弾性はりとみなしたときに定義される断面二次モーメントであり、換算断面二次モーメントと呼ばれることがある。このような換算断面を考えることにより、第Ⅱ段階にある鉄筋コンクリートはりを簡単に弾性はりとして解析できるので便利である。

- ここで用いた計算仮定は、曲げひび割れ発生後はコンクリートは引張力を負担しないということであるが、現実はこの仮定が満足されるのは、ひび割れ断面においてである。ひび割れ以外の箇所では、鉄筋とコンクリートの付着によりコンクリートに引張力が伝達される。つまり、曲げひび割れ発生後もコンクリートは平均的には引張力を受け持つのである。これをコンクリートのテンションスティフニング (Tension Stiffening) 効果という。したがって、鉄筋コンクリートはりの平均的な曲げ剛性は、ここでの計算で評価されるよりも現実には大きい。しかし、計算が簡単であること、安全側の結果をもたらすことから、曲げひび割れ発生後はコンクリートは引張力を負担しないとの仮定が用いられる。

(3)

支配方程式は (2) と同じ。

鉄筋の降伏条件 $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ (17)

(8)(10)(17)より $\phi_y = \frac{\varepsilon_y}{d - z_n} = \dots = 1.32 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$

(13)(14)(15)(16)より $M_y = \frac{1}{2} E_c \phi_y z_n^2 b \cdot \frac{2}{3} z_n + A_s \sigma_s \cdot (d - z_n) = \dots = 51.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$

答 : 51.4kN·m

(4)

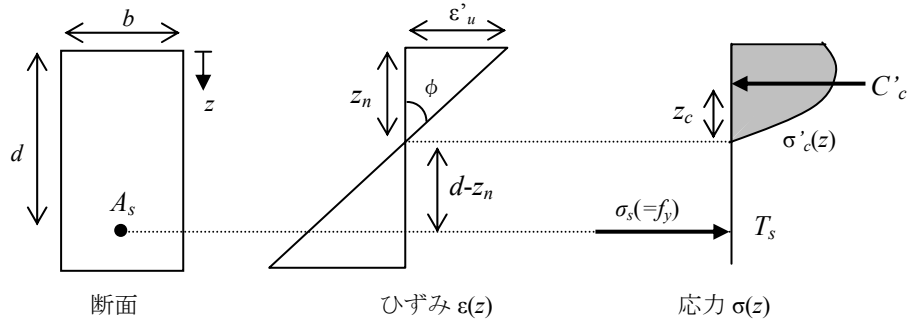


図4 終局状態における断面のひずみ、応力の状態

まず、コンクリートの応力-ひずみ関係を一般表示して、終局状態における、断面のひずみ、応力の状態に関する支配方程式を考える。図4のように、断面上縁にz軸の原点を選び、曲率を ϕ 、中立軸の位置を z_n とする。

支配方程式：

{	平面保持（棒材の運動場の仮定）	$\varepsilon(z) = \phi \cdot (z - z_n)$	(18)
	コンクリートの応力	$\sigma'_c(z) = F(\varepsilon'(z))$	(ただし $z \leq z_n$) (19)
	鉄筋の応力	$\sigma_s = f_y$	(20)
	断面力と内部応力の関係		
	• 軸力	$0 = C'_c - T_s$	(21)
	• 曲げモーメント（中立軸まわり）	$M = C'_c \cdot z_c + T_s \cdot (d - z_n)$	(22)
コンクリートの破壊条件	$\varepsilon'(0) = \varepsilon'_u$	(23)	

解法：

図1の(i)のコンクリートの応力-ひずみ関係を用いた場合

図5を参照して、

$$\begin{aligned}
 C'_c &= \int_A \sigma'_c(z) dA \\
 &= \int_0^{\xi_o} kf'_c \left\{ 2 \left(\frac{\varepsilon'_c(\xi)}{\varepsilon'_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon'_c(\xi)}{\varepsilon'_o} \right)^2 \right\} bd\xi + \int_{\xi_o}^{z_n} kf'_c bd\xi \quad \left(\varepsilon'_c(\xi) = \varepsilon'_u \frac{\xi}{z_n}, \quad \xi_o = z_n \frac{\varepsilon'_o}{\varepsilon'_u} \right) \\
 &= \dots = kf'_c bz_n \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon'_o}{\varepsilon'_u} \right) = 0.688 f'_c b z_n \\
 z_c &= z_n - \frac{\int_A \sigma'_c(z) z dA}{\int_A \sigma'_c(z) dA} = \dots = \frac{kf'_c bz_n^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left(\frac{\varepsilon'_o}{\varepsilon'_u} \right)^2 \right\}}{kf'_c bz_n \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon'_o}{\varepsilon'_u} \right)} = 0.584 z_n
 \end{aligned}$$

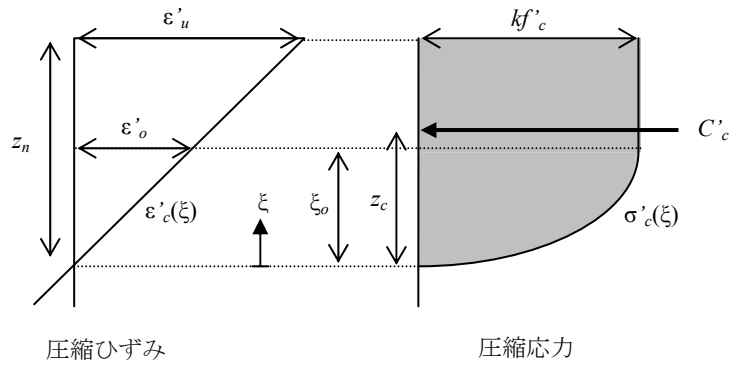


図5 圧縮応力の分布の拡大図（応力-ひずみ関係（i）を用いた場合）

$$(21)より 0 = 0.688f'_c b z_n - A_s f_y \quad \therefore z_n = \frac{A_s f_y}{0.688 f'_c b} = \dots = 76.3 \text{ mm}$$

$$(22)より M_u = 0.688 f'_c b z_n \cdot 0.584 z_n + A_s f_y \cdot (d - z_n) = \dots = 51.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

答：51.6kN・m

$$\text{破壊時の曲率は } \phi_u = \frac{\varepsilon'_u}{z_n} = \dots = 4.59 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

図1の（ii）のコンクリートの応力-ひずみ関係を用いた場合

図6を参照して、

$$C'_c = \int_A \sigma'_c(z) dA$$

$$= \int_{0.2z_n}^{z_n} k f'_c b d \xi = \dots = 0.68 f'_c b z_n$$

$$z_c = 0.6 z_n$$

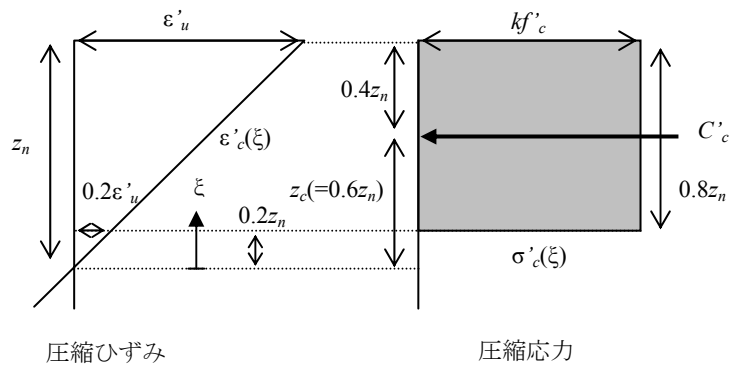


図6 圧縮応力の分布の拡大図（応力-ひずみ関係（ii）を用いた場合）

$$(21)より 0 = 0.68 f'_c b z_n - A_s f_y \quad \therefore z_n = \frac{A_s f_y}{0.68 f'_c b} = \dots = 77.2 \text{ mm}$$

$$(22)より M_u = 0.68f'_c b z_n \cdot 0.6 z_n + A_s f_y \cdot (d - z_n) = \dots = 51.8 kN \cdot m$$

答 : 51.8kN・m

$$破壊時の曲率は \phi_u = \frac{\epsilon'_u}{z_n} = \dots = 4.53 \times 10^{-5} mm^{-1}$$

コメント :

- 曲げ耐力 M_u は、鉄筋降伏モーメント M_y とほぼ同じ値となった。降伏以降、鉄筋の応力はそれ以上増加しない仮定で計算したので、モーメントは圧縮合力の作用位置と鉄筋位置の間の距離（モーメントアーム）に依存することになる。圧縮合力の作用位置は計算上ほとんど変化しないので、鉄筋降伏以降のモーメントはほぼ一定となる。現実には、鉄筋は降伏以降も応力が増加するので、曲げ耐力はその分計算結果よりも大きくなる。
- RC はりの曲げ耐力 M_u は結局、

$$M_u = pbd^2 f_y \left(1 - \frac{1-\alpha}{\beta} p \frac{f_y}{f'_c} \right) \cong pbd^2 f_y \left(1 - 0.60 p \frac{f_y}{f'_c} \right) \quad (24)$$

となる。ただしこれは、コンクリートの応力-ひずみ関係 (i) を用いた場合についてである。 α および β はそれぞれ以下である。

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left(\frac{\epsilon'_o}{\epsilon'_u} \right)^2}{1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon'_o}{\epsilon'_u}} = 0.584, \quad \beta = k \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon'_o}{\epsilon'_u} \right) = 0.688$$

式(24)を見ると、RC はりの曲げ耐力 M_u にはコンクリート強度 f'_c の影響は大きくないことがわかる。たとえば、コンクリート強度が倍になっても、曲げ耐力は決して倍にはならない。その代わり、鉄筋比 p 、断面寸法（有効高さ d ）の影響が大きいことがわかる。

- コンクリートの応力-ひずみ関係 (i) を用いた場合には、圧縮合力 C'_c とその作用位置 z_c を求める際に、多少複雑な積分計算が必要になる。（ただし、この程度の計算能力は持ち合わせてほしい。）一方、コンクリートの応力-ひずみ関係 (ii) を用いた場合には、応力分布が簡単な形状になるので、圧縮合力 C'_c とその作用位置 z_c が簡単に求まる。
- 二通りの応力-ひずみ関係を用いた計算結果を比較すると、応力-ひずみ関係が異なっているにも関わらず、それらを用いて計算される部材の曲げ耐力は、近い値となっていることがわかる。これは偶然ではなく、計算の過程を振り返って見ると、「圧縮応力の分布が異なっても圧縮合力 C'_c とその作用位置 z_c が同じであれば、部材の曲げ耐力 M_u は同じとなる。」ことがわかる。実は、例題の設定 (4) はこのことの説明も兼ねている。
- 「圧縮応力の分布が異なっても圧縮合力 C'_c とその作用位置 z_c が同じであれば、部材の曲げ耐力 M_u は同じとなる。」のであれば、計算が簡単で、複雑な応力-ひずみ

み関係を与えた場合と同じ曲げ耐力の算定結果となる，応力-ひずみ関係が役に立つ．最も計算が簡単になるのは，矩形の応力分布を与える（ii）の応力-ひずみ関係である．実際，（ii）の応力-ひずみ関係は曲げ耐力算定用の応力-ひずみ関係として用いられているものである．この応力-ひずみ関係を用いた場合に算定される矩形の応力分布を「等価応力ブロック」と呼ぶ．

- 注意しなければならないのは，「等価応力ブロック」の考え方と（ii）の応力-ひずみ関係は，終局状態における曲げ耐力の算定にのみ適用できるということである．他の，荷重段階には原理的に適用できない．
- コンクリートの応力-ひずみ関係（i）は，土木学会コンクリート標準示方書に掲載されているものである．実は，この応力-ひずみ関係も，終局状態における曲げ耐力算定用に提案されたものであって，材料試験により得られるコンクリートの応力-ひずみ関係を忠実に表現するものではない．（しかし，これ以外には，コンクリートの応力-ひずみ関係を汎用的に表すモデルがあまりないので，この応力-ひずみ関係は，終局状態以外の計算にも用いられることが多い．）

（5）

（1）（2）（3）（4）の計算結果を直線で結ぶと以下の図のようになる．

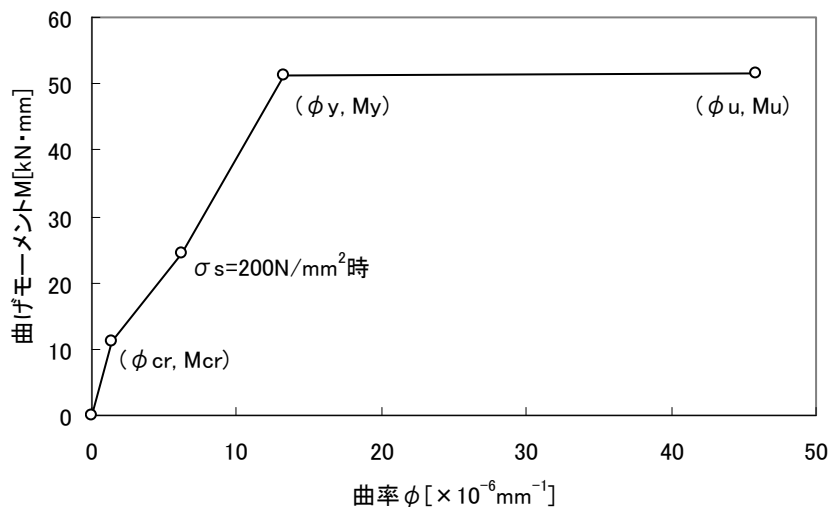


図7 RCはり断面の曲げモーメント-曲率関係

コメント：

- 用いた計算仮定に基づき，計算される結果は第I段階，第II段階ともに曲モーメント-曲率関係が原点を通る直線になる．
- 図7では，第III段階は途中の点の計算を行うことなく，始点と終点を直線で結んでいる．コンクリートの応力-ひずみ関係にたとえば図1の（i）を用いて，第III段階の曲モーメント-曲率関係も計算することができる．ただし，繰返し計算が必要となり手計算では難しい．簡単なプログラムを組めば解ける．