## §基礎事項の復習

鉄筋コンクリート構造の力学は，一般的な材料力学，構造力学に立脚している．それらは，それぞれの専門の講義において学習済みであると思われるが，ここでは，鉄筋コンクリート構造の力学を論じる上で，きわめて重要な以下の二点について，簡単に復習する．

- 材料の応力とひずみ
- 棒材の力学

## §材料の応力とひずみ

コンクリートや鋼材をはじめ，種々の材料で構築された構造物の力学挙動を計算により予測するには，各材料がどのような「力と変形に関する性質」を有しているかが情報として必要である．一般に，材料の「力と変形に関する性質」は，試験により実測する．いま，図１の左上に示すように，円柱型の供試体に，軸方向に圧縮および引張荷重を加え，その変形を測定する実験を考える．

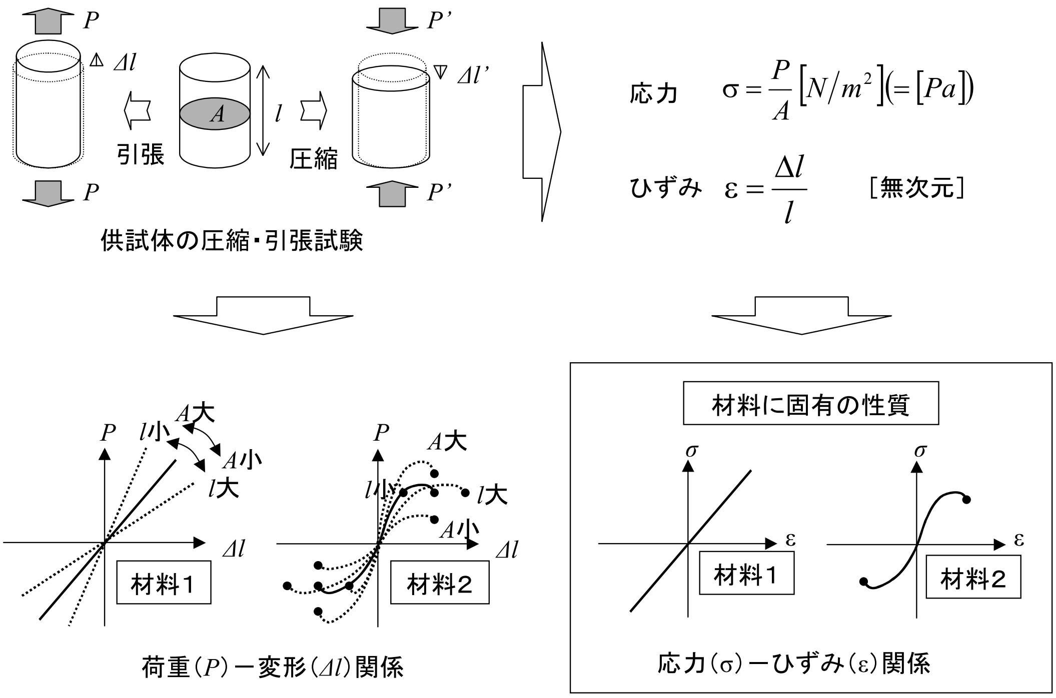


図１　材料の応力とひずみ

供試体は，引張荷重を加えたときには伸び，圧縮荷重を加えたときには縮む．実験結果として直接得られるのは，荷重 $P$ と変形 $\Delta l$ の関係である（図１の左下）．材料１と材料２の二種類の例を想定した．ある寸法の供試体を用いて実験を行った場合，それぞれの材料について，実線で描いた荷重－変形関係が得られたとする．この荷重－変形関係は，どれだ

け普遍性があるものであろうか．実は，図 1 の左下に示したように，同じ材料を用いて作成された供試体であっても，供試体寸法（円柱供試体の場合は断面積 $A$ と高さ $l$）が変わると，荷重 $P$ と変形 $\Delta l$ の関係は変わる．したがって，供試体の荷重－変形関係は，材料の「力と変形に関する性質」を普遍的に表すとはいえない．

そこで，「荷重」に代わって以下で与えられる「応力」を，同じく「変形」に代わって「ひずみ」を考える．

応力　$\sigma = \dfrac{P}{A}$

ひずみ　$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

応力は材料が伝達する単位面積当りの力，ひずみは材料の長さ変化率の意味を持つ．応力は力を長さの二乗で除した次元を持ち，ひずみは無次元量であることに注意されたい．（とくに，ひずみは微小量であるため「$10^{-6}$」を意味する「μ（マイクロ）」をあたかも単位のように用いることがあるので，長さの次元を持つと誤解している学生が多い．）

先ほどの実験結果を「応力」と「ひずみ」の関係で表示しなおすと，図 1 の右下に示すように，供試体の寸法によらず，材料に固有の関係が得られる．すなわち，応力－ひずみ関係は，材料の「力と変形に関する性質」を普遍的に表しているといえる．このことを利用して，我々は任意の形状，寸法の構造物の変形挙動を計算により予測することができるのである．図 1 で考えた供試体は，形状，荷重条件が単純であるので，供試体内部が一様な応力とひずみの状態であるが，一般的な構造物では，構造物中の各部分で応力，ひずみが異なる．しかし，各部分の応力とひずみは，その材料固有の応力－ひずみ関係に則って振舞っているのである．

材料の「応力－ひずみ関係」は，力を受けた構造物の変形を考える問題においては，材料の性質を表すものであるので，「構成則」や「構成方程式」と呼ばれることがある．

図 1 で例示した材料 1 の応力－ひずみ関係は原点を通る直線である．この応力－ひずみ関係は，最も単純なものであり，直線の傾きのみで性質を表現することができる．このような性質をもつ材料は「弾性体」や「弾性材料」と呼ばれ，応力－ひずみ直線の傾きは「弾性係数」や「ヤング率」と呼ばれる．一方，材料 2 の応力－ひずみ関係は曲線である．このような材料は「非線形材料」と呼ばれることがある．

鉄筋コンクリートを構成している材料は，鋼とコンクリートである．鋼材は降伏前であれば，弾性体としてよく近似できる．コンクリートも応力が小さい範囲であれば，弾性体として表すことができる．しかし，いずれもある範囲からは，弾性体として扱えない．それゆえ，鉄筋コンクリートの変形挙動を扱うためには，弾性体のみを対象とした力学では不十分であり，材料非線形性を考慮できる理論を用いなければならない．学部レベルの構造力学では，一般に弾性体を想定して論じられることが多いので，注意が必要である．

# §棒材の力学*

## 1．棒材とは

一般の物体は三次元方向に任意の形状をしている．１方向の寸法が他の２方向の寸法より著しく大きい部材を棒材と呼ぶ．我々が対象とする構造部材である，はり，柱，桁などは棒材と考えることができる．（その他，構造物を構成する部材の種類には，壁，スラブなどの面部材などがある．）棒材では，その幾何的特性から，荷重を受けたときの変形および内部の応力の流れが，一般的な三次元部材に比べて単純となる．棒材の変形（運動場という），内部の応力の流れは，どのような仮定に基づき，どのように数学的に記述されるのかは，鉄筋コンクリート構造の力学を学習するための基礎として重要であるので，具体的に鉄筋コンクリートを題材にする前に復習することとした．なお，ここでは簡単のため，一平面内に外力が作用し，同じ平面内でのみ変位する問題を取り扱う．また，曲げ，および曲げと軸力を受ける問題を考える．

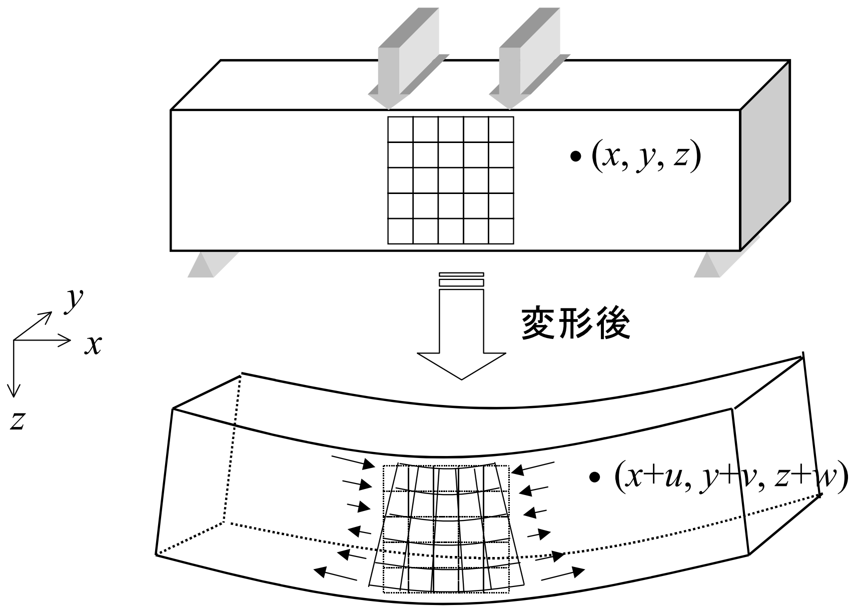


図２　曲げを受ける棒材

図２は棒材（はり）が曲げ荷重を受けて変形するよううすを模式的に示している．はりの側面に格子を描いたのは，各部分の変形を視覚的に表すためである．

余談となるが，数学的な取り扱いに移る前に，この図を見て，はりが変形するようすが直感的にイメージできることがまず重要である．物理イメージや想像力ともいわれるが，工学も自然科学に立脚した学問である以上，自然現象を理解することが基本である．数学的記述は，現象に対する物理イメージをモデル化し定式化したに過ぎないのである．

* この事項は，構造力学の専門書で理論的に述べられているので，各自復習しておくこと．ここでは「構造物の弾性解析」（西野文雄，長谷川彰夫著，技報堂出版）を参考にした．

この問題の場合，以下がイメージできる．

- はりの上側は水平方向に縮み，下側は伸びる．
- 上側において縮む度合い（ひずみ）は上に行くほど大きく，下側において伸びる度合い（ひずみ）は下に行くほど大きい．
- 力の流れも変形と同様であって，はりの上側は圧縮され，下側は引張られる．

$x,y,z$ 方向を図２のように定義する．はりが変形するということは内部の各点が変位することに他ならない．はり内部の任意の点$(x, y, z)$の $x,y,z$ 各方向への変位を$(u, v, w)$と書く．一般的な三次元問題では，以下のように３つの直ひずみ成分，３つのせん断ひずみ成分が存在する．

直ひずみ：　$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

せん断ひずみ：　$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

棒材の場合，その幾何的特性から，上記のひずみのいくつかが無視できる．

まず，軸方向（$x$ 方向）への伸縮変形がせん断変形に比べて卓越することから，

「はりのせん断変形は 0 である」（第 1 の仮定）

と仮定する．せん断変形が 0 であると部材軸に直角な線素は変形後も直角な線素を保つ．すなわち第 1 の仮定は，

「部材軸に直角な平面は，変位後も軸線に直角で平面を保つ」

と言い換えることができる．これは一般に，「Bernoulli-Euler の仮定」，あるいは「平面・直角保持の仮定」と呼ばれる．この仮定より，

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

となる．

次に，軸方向（$x$ 方向）への伸縮変形に比べて，部材軸に直角な方向（$y,z$ 方向）への伸縮が小さいことから，

「断面形状は変位後も変化しない」（第 2 の仮定）

と仮定する．この仮定より，

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

となる．

以上より，結局はりにおいて有意なひずみは，軸方向（$x$ 方向）の直ひずみ $\varepsilon_x$ だけということになる．つまり，棒材の変形は非常にシンプルであるので，きわめて少ない変数で表現することができる．それゆえ，手計算でも支配方程式を解くことができる場合が多く，「物理イメージ→定式化→解を求める」という流れが手作業で行えるため，現象と数学モデルで表される世界との関係を理解するのに適しているといえる．

## ２．棒材の運動場とひずみと変位の関係

棒材の運動場（変形）に関する仮定，

「はりのせん断変形は 0 である」（第 1 の仮定）

「断面形状は変位後も変化しない」（第 2 の仮定）

に加えて，

「はりに生ずる変位は微小とする（微小変位理論）」（第 3 の仮定）

と仮定する．

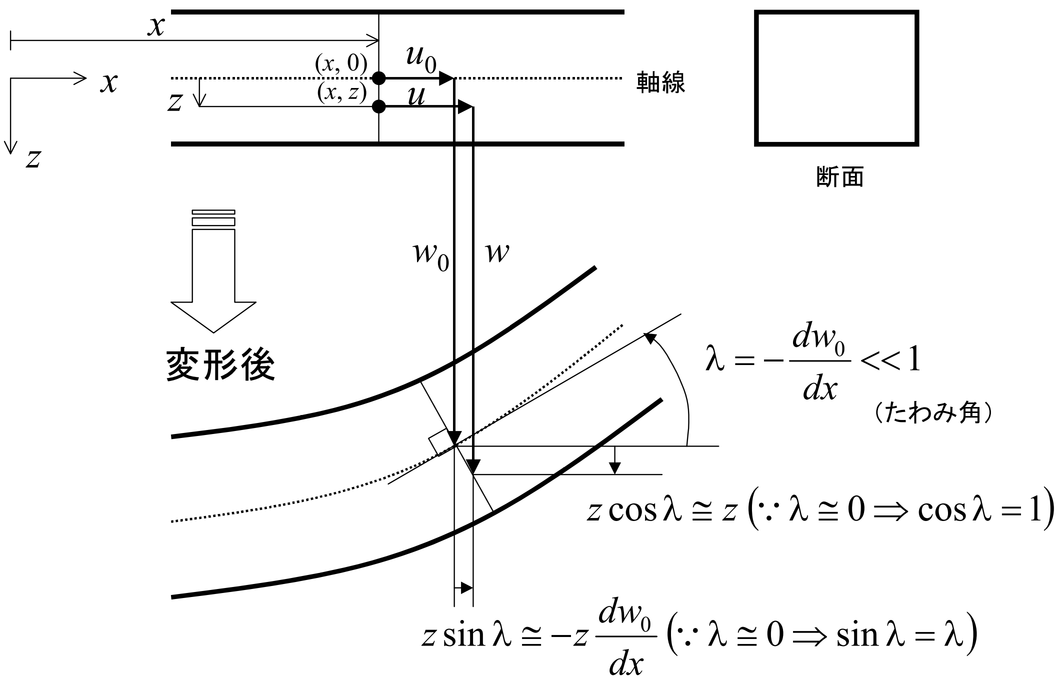


**図３　棒材の運動場（変形）**

図３は以上の仮定のもとで，はりに生ずる変位を示している．なお，変形は $xz$ 面内のみを考えるので，この図は二次元で表している．図において，$(x, z)$ははり内の任意の点，$(x, 0)$は軸線上の点である．軸線の選び方は任意である．

微小変位の仮定より，たわみ角 $\lambda$ は微小である．このことより，はりの変位前と変位後の位置関係は次のように与えられる．

$$w = w_0 + z\cos\lambda - z$$

$$\cong w_0$$

$$u = u_0 + z\sin\lambda$$

$$\cong u_0 - z\frac{dw_0}{dx}$$

したがって，$x$ 方向の直ひずみ $\varepsilon_x$ は以下のように表される．

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{u_0 - z\frac{dw_0}{dx}\right\}$$

$$= \frac{du_0}{dx} - z\frac{d^2 w_0}{dx^2}$$

ここで，

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \equiv \dfrac{du_0}{dx} & \text{（軸線の } x \text{ 方向の直ひずみ）} \\ \phi \equiv -\dfrac{d^2 w_0}{dx^2} & \text{（軸線の曲率）} \end{cases}$$

と書くと，任意の点の $x$ 方向の直ひずみは以下のように書ける．

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\phi \qquad (1)}$$

式(1)は，はりの断面内の任意の点の $x$ 方向の直ひずみ $\varepsilon_x$ が，軸線（$z$=0）上のひずみ $\varepsilon_0$ と軸線の曲率 $\varphi$ を用いて，軸線からの $z$ 方向の距離 $z$ の 1 次関数で表されることを示し，棒材の変形に関する基本的な特徴である．

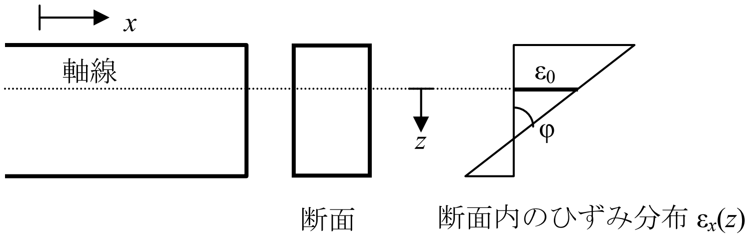


**図４　はりの断面内のひずみ分布**

式(1)で表される結果を図示すると図４のようになる．断面内の直ひずみ $\varepsilon_x$ は $z$ の一次関数であるため，直線状に分布し，その傾きが曲率 $\varphi$，切片が $\varepsilon_0$ という解釈もできる．これまでの過程で明らかなように，この定理は，棒材の運動場の仮定のみに基づいて導き出されており，部材を構成している材料の性質（応力－ひずみ関係）および断面形状（矩形断面や円形断面などの違い）に関わらず成り立つことに留意されたい．

なお，式(1)に表される「ひずみが直線分布する」という定理を，「平面保持」ということがある．

## ３．棒材の内部の応力

物体に荷重を加えると物体内に力が発生する．力が流れる，あるいは力が分布するとも表現される．物体内部の力を単位面積あたりの力で考え，「応力」と呼ぶことは先述した．曲げを受けるはりの場合には，図５上に示したように，上部では圧縮応力，下部では引張応力が生じる．

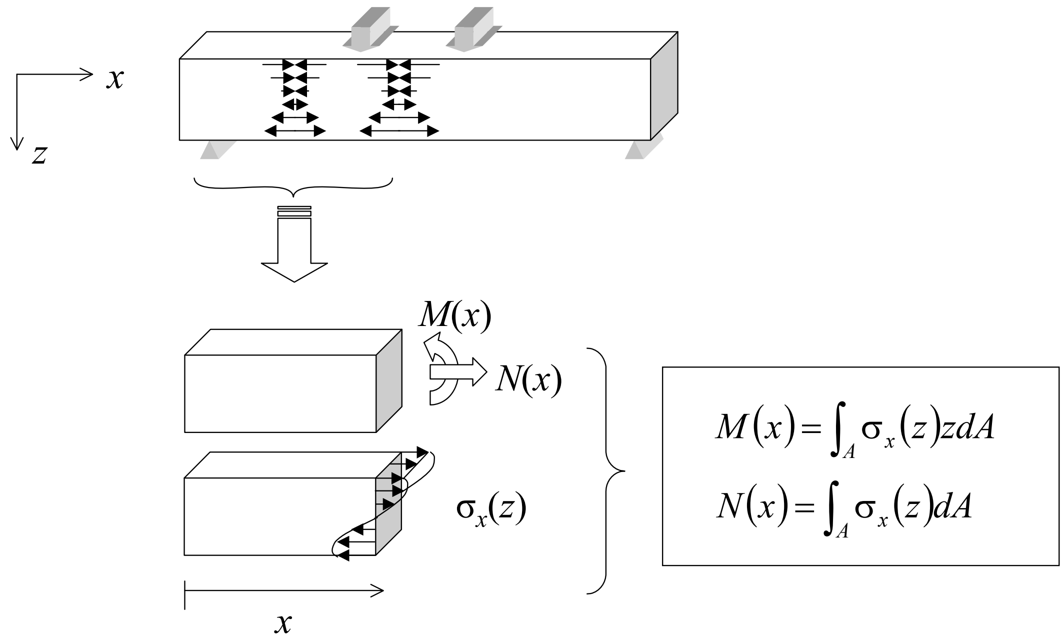


**図５　断面力と棒材の内部の応力**

棒材の内部の各位置における応力とその位置におけるひずみとは，その材料固有の「応力－ひずみ関係」にしたがう．棒材の場合は，有意なひずみは軸方向の直ひずみのみであったので，応力も軸方向の直応力が卓越する．

$$\sigma_x(z) = f(\varepsilon_x(z)) \tag{2}$$

式(2)の記号 $f$ は関数関係にあることを一般的に表したに過ぎず，弾性材料，非線形材料等の種類は問わない．前節において，構成材料によらずはり内部のひずみが直線分布することを導いたが，応力分布は材料に依存することになる．弾性材料であれば，応力とひずみは比例関係にあるので，応力分布はひずみ分布と相似となる．非線形材料の場合，材料の種類や応力レベルによって様々な様相の応力分布を呈することになる．しかし，材料の応力－ひずみ関係は，理論的に導き出せるものではなく，試験をして求める実験的関係であるので，部材が荷重を受けたときの変形や応力状態を求める工学問題では，一般に既知関係として与えられるものである．

ある断面において仮想的に棒材を切断し，切断面に切断前に働いていた力と同じ力を外力として加えると，切断された部分は切断前と同じつりあい状態が再現される．この作用させるべき力は断面力と呼ばれる．断面力は，軸力，せん断力，曲げモーメント，ねじり

モーメントが定義される．ここでは，軸力と曲げモーメントのみを考える．

棒材の任意の断面（$x$=$x$）において，その断面内の応力分布と，その断面に作用している断面力は以下の関係にある（図５）．

軸力：
$$N(x)=\int_A \sigma_x(z)dA \tag{3}$$

軸線まわりの曲げモーメント：
$$M(x)=\int_A \sigma_x(z)zdA \tag{4}$$

ここで，$A$ ははりの断面積を示す．式(3)(4)は，応力分布の形状によらず，換言すれば材料の種類によらず成り立つ．

式(1)(2)(3)(4)により，曲げモーメントと軸力を受ける棒部材の変形と応力状態を求める問題（一般に応力解析問題という）における支配方程式が構成される．つまり，問題に応じて，境界条件（多くの場合荷重）を与え，未知量（多くの場合変形）を適当に設定し，支配方程式を未知量に関する連立方程式とみなして解くことにより，解が求まる．繰返しになるが，ここまでの議論はすべて，材料の応力－ひずみ関係，断面形状によらず成り立つ．もちろん鋼構造であっても，鉄筋コンクリート構造であっても，弾性と近似できる範囲であっても，そうでなくても，適用できる．

## ４．弾性はり

弾性はり，つまり構成材料が弾性体である棒部材の場合には，断面力と断面内の応力の間の簡単な関係を導くことができる．鉄筋コンクリート構造においても，弾性はりとみなせる応力範囲では，この公式を用いることがある．

はりが弾性材料で構成されているとすると，

$$\sigma_x(z) = E\varepsilon_x(z) \tag{5}$$

ここに，$E$ は弾性係数（材料定数）である．

式(1)(5)より次式を得る．

$$\sigma_x(z) = E(\varepsilon_0 + z\phi) \tag{6}$$

式(6)を式(3)(4)に代入すると，それぞれ以下となる．

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A E(\varepsilon_0 + z\phi)dA \\ &= E\int_A dA \cdot \varepsilon_0 + E\int_A zdA \cdot \phi \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A E(\varepsilon_0 + z\phi)zdA \\ &= E\int_A zdA \cdot \varepsilon_0 + E\int_A z^2 dA \cdot \phi \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，

$$\begin{cases} A \equiv \int_A dA & \text{（断面積）} \\ G \equiv \int_A zdA & \text{（断面一次モーメント）} \\ I \equiv \int_A z^2 dA & \text{（断面二次モーメント）} \end{cases}$$

と書くと，式(7)(8)はそれぞれ以下のように書ける．

$$N = EA\varepsilon_0 + EG\phi \tag{9}$$

$$M = EG\varepsilon_0 + EI\phi \tag{10}$$

軸線の選び方は任意であるから，$G$=0 となるような線（≡図心）に軸線を一致させると，式(9)(10)はそれぞれ以下となる．

$$N = EA\varepsilon_0 \tag{11}$$

$$M = EI\phi \tag{12}$$

式(6)(11)(12)より，$\varepsilon_0$，$\varphi$ を消去すると，以下が得られる．

$$\boxed{\sigma_x(z) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I}z} \tag{13}$$

ただし $z$ の原点は断面図心上，$M(x)$は軸線まわりの曲げモーメントである．

式(13)は，弾性はりの場合，内部の応力が断面力より直接求められることを示している．もちろん，弾性はりであっても，この公式を用いなくとも，式(1)(2)(3)(4)を連立することにより内部の応力を求めることはできるが，手計算では圧倒的に公式の利用が便利である．ただし，当然ながら，この公式は弾性はりの場合のみに成り立つのであって，非線形材料に適用できないことに注意しなければならない．